k を定数とし，$f(x) = x^3 - kx$ とおく．曲線 $C : y = f(x)$ 上に原点と異なる点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ をとる．点 P を通り曲線 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線のうち，傾きが大きい方を ℓ_1，小さい方を ℓ_2 とする．さらに，C と ℓ_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1，C と ℓ_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする．ℓ_1 および ℓ_2 の方程式と，Q_1 および Q_2 の座標を求めよ．

(20 千葉大 2)

【答】 $\ell_1 : y = (3a^2 - k)x - 2a^3$，$\ell_2 : y = \left(\dfrac{3}{4}a^2 - k\right)x + \dfrac{a^3}{4}$，

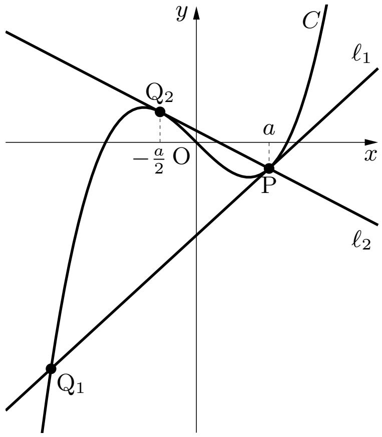
$\mathrm{Q}_1(-2a,\ -8a^3 + 2ka)$，$\mathrm{Q}_2\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^3}{8} + \dfrac{k}{2}a\right)$

【解答】

$$C : y = f(x) = x^3 - kx$$
$$f'(x) = 3x^2 - k$$

C 上の点 $(t,\ t^3 - kt)$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2 - k)(x - t) + t^3 - kt$$
$$\therefore\quad y = (3t^2 - k)x - 2t^3 \qquad \cdots\cdots ①$$



である．これが C 上の原点と異なる点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ を通るから

$$a^3 - ka = (3t^2 - k)a - 2t^3$$
$$2t^3 - 3at^2 + a^3 = 0$$
$$(t - a)^2(2t + a) = 0$$
$$\therefore\quad t = a,\ -\frac{a}{2}$$

である．2 つの接線の傾き $f'(a)$，$f'\left(-\dfrac{a}{2}\right)$ は

$$f'(a) = 3a^2 - k$$
$$f'\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{3}{4}a^2 - k$$
$$\therefore\quad f'\left(-\frac{a}{2}\right) < f'(a)$$

である．よって ℓ_1，ℓ_2 の方程式は

$$\boldsymbol{\ell_1 : y = (3a^2 - k)x - 2a^3} \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$\boldsymbol{\ell_2 : y = \left(\frac{3}{4}a^2 - k\right)x + \frac{a^3}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

また，C と接線 ① の共有点の x 座標は

$$x^3 - kx = (3t^2 - k)x - 2t^3$$
$$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$$
$$(x - t)^2(x + 2t) = 0$$
$$\therefore\quad x = t,\ -2t$$

であり，Q_1，Q_2 は P でない方 ($x = a$ でない方) の共有点である．

$t = a$ のとき，共有点の x 座標は $x = a,\ -2a$ であり，Q_1 の x 座標は $-2a$ であるから

$$\boldsymbol{\mathrm{Q}_1(-2a,\ -8a^3 + 2ka)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$t = -\dfrac{a}{2}$ のとき，共有点の x 座標は $x = -\dfrac{a}{2},\ a$ であり，Q_2 の x 座標は $-\dfrac{a}{2}$ であるから

$$\boldsymbol{\mathrm{Q}_2\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^3}{8} + \frac{k}{2}a\right)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．