a は 0 でない定数とする．2 つの放物線 $y=x^2$ と $x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど 3 本となるような a の範囲を求めよ．

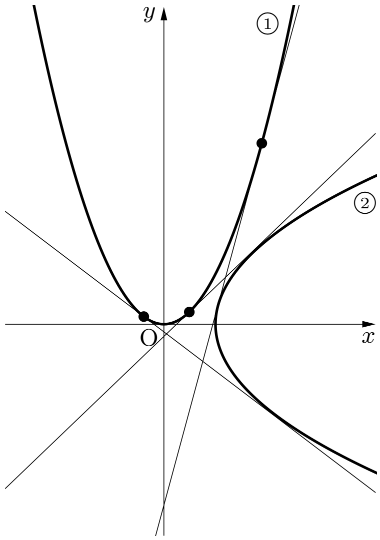
(20 千葉大 7)

【答】 $a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}<a$

【解答】

$$y=x^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$x=\frac{1}{2a}y^2+\frac{3a}{4} \quad \cdots\cdots ②$$



$(x^2)'=2x$ より，放物線 ① 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y=2t(x-t)+t^2$$

$$\therefore\quad y=2tx-t^2 \quad \cdots\cdots ③$$

である．直線 ③ が放物線 ② と接する条件は

$$y=2t\left(\frac{1}{2a}y^2+\frac{3a}{4}\right)-t^2$$

$$\frac{t}{a}y^2-y+\frac{3}{2}at-t^2=0$$

が重解をもつことであり，$a \fallingdotseq 0$ に注意すると

$$\begin{cases}\dfrac{t}{a}\fallingdotseq 0\\(-1)^2-4\cdot\dfrac{t}{a}\cdot\left(\dfrac{3}{2}at-t^2\right)=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}t\fallingdotseq 0\\a-6at^2+4t^3=0\end{cases}$$

$$\iff a-6at^2+4t^3=0 \quad \cdots\cdots ④$$

である．④ を満たす直線 ③ がちょうど 3 本となる条件は

④ を満たす実数 t が 3 つ存在する　　$\cdots\cdots (*)$

ことである．$f(t)=4t^3-6at^2+a$ とおく．

$$f'(t)=12t^2-12at=12t(t-a)$$

であり

$$\begin{aligned}(*) &\iff (\text{極大値})(\text{極小値})<0\\&\iff f(0)f(a)<0\\&\iff a(-2a^3+a)<0\end{aligned}$$

であるから，求める a の範囲は

$$a^2(2a^2-1)>0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a<-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}<a} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．