任意の 2 直線 $x=a,\ x=b$ が放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ と交わる点をそれぞれ R，S とする．ただし，$a\fallingdotseq b,\ a\fallingdotseq 0,\ b\fallingdotseq 0$ とする．

ア．点 R における放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ の法線の方程式を求めよ．

イ．問アで求めた法線に関して，直線 $x=a$ と対称な直線 l の方程式を求めよ．

ウ．点 S における放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ の法線に関して，直線 $x=b$ と対称な直線を m とする．直線 l と直線 m の交点の座標を求めよ．

(20 豊橋技科大 2(2))

【答】

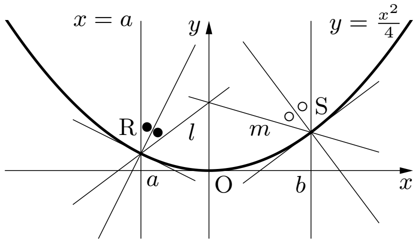
ア．$y=-\dfrac{2}{a}x+2+\dfrac{a^2}{4}$

イ．$l: y=\dfrac{a^2-4}{4a}x+1$

ウ．(0, 1)

【解答】

ア．
$$y=\frac{x^2}{4}$$
$$y'=\frac{x}{2}$$



であるから，放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上の点 $\mathrm{R}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ $(a\fallingdotseq 0)$ における法線の方程式は
$$y=-\frac{2}{a}(x-a)+\frac{a^2}{4}$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{y=-\frac{2}{a}x+2+\frac{a^2}{4}} \qquad \cdots\cdots ①$$
……(答)

である．

イ．① と x 軸正方向とのなす角を α，l と x 軸正方向とのなす角を α' とおく．① に関して，直線 $x=a$ と直線 l は対称であるから
$$\tan\alpha=-\frac{2}{a},\quad \frac{\frac{\pi}{2}+\alpha'}{2}=\alpha$$
が成り立つ．
$$\alpha'=2\alpha-\frac{\pi}{2}$$
$$\therefore\quad \tan\alpha'=\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan 2\alpha}=-\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$$
$$=-\frac{1-\frac{4}{a^2}}{2\left(-\frac{2}{a}\right)}=\frac{a^2-4}{4a}$$
である．l は点 R を通るから，l の方程式は
$$y=\frac{a^2-4}{4a}(x-a)+\frac{a^2}{4}$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{l: y=\frac{a^2-4}{4a}x+1}$$
……(答)

である．

ウ．問イと同様にして

$$m : y = \frac{b^2-4}{4b}x+1$$

であるから，l, m の交点の座標は

(0, 1) ……(答)

である．

- l, m が共有点をもつ条件は
$$\frac{a^2-4}{4a}x+1 = \frac{b^2-4}{4b}x+1$$
を満たす実数 x が存在することである．
$$\left(\frac{a^2-4}{4a} - \frac{a^2-4}{4a}\right)x = 0$$
$$\frac{b(a^2-4)-b(a^2-4)}{4ab}x = 0$$
$$\frac{(a-b)(ab+4)}{4ab}x = 0$$
$a \fallingdotseq 0$, $b \fallingdotseq 0$, $a \fallingdotseq b$ より
$$ab+4=0 \text{ または } x=0$$
となる．求める交点は任意の a, b に対しての交点であるから，$ab+4=0$ のときは排除する．
　よって，求める交点の x 座標は 0 であり，交点の座標は $(0,\ 1)$ である．
- $ab+4=0$ のとき
$$\frac{b^2-4}{4b} = \frac{\dfrac{16}{a^2}-4}{4\left(-\dfrac{4}{a}\right)} = \frac{a^2-4}{4a}$$
であり，l と m は一致する (共有点は l (m) 上のすべての点である)．
- l, m の交点 $(0,\ 1)$ は放物線の焦点である．