関数 $y=\log_2 x+\log_4(-2x+1)$ の最大値と，そのときの x の値を求めなさい．

(20 信州大 教育 1)

【答】 $x=\dfrac{1}{3}$ のとき，最大値 $-\dfrac{3}{2}\log_2 3$

【解答】

$$y=\log_2 x+\log_4(-2x+1)$$

(真数) >0 より

$$\begin{cases} x>0 \\ -2x+1>0 \end{cases} \qquad \therefore \quad 0<x<\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

である．このとき

$$\begin{aligned} y &= \log_2 x+\frac{\log_2(-2x+1)}{\log_2 4} \\ &= \log_2 x+\frac{\log_2(-2x+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\{2\log_2 x+\log_2(-2x+1)\} \\ &= \frac{1}{2}\log_2\{x^2(-2x+1)\} \end{aligned}$$

である．$f(x)=x^2(-2x+1)$ とおくと

$$f'(x)=-6x^2+2x=-2x(3x-1)$$

$0<x<\dfrac{1}{2}$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(-2\cdot\dfrac{1}{3}+1\right)=\dfrac{1}{27}$ をとる．

関数 $y=\dfrac{1}{2}\log_2 X$ は単調増加であるから，関数 y は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{3}}\ \text{のとき，最大値}\ \frac{1}{2}\log_2 f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{27}=\boldsymbol{-\frac{3}{2}\log_2 3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる