関数 $f(x)=ax^2+2bx$ は点 $(2,\ 4)$ で極値をとる．関数

$$f(x),\quad g(x)=ax^2+bx,\quad h(x)=a(x-2)^2+b(x-2)$$

を用いて 3 つの曲線

$$C_f: y=f(x),\quad C_g: y=g(x),\quad C_h: y=h(x)$$

を定義する．曲線 C_f と C_g，C_f と C_h，C_g と C_h の交点をそれぞれ U，V，W とする．ただし，$a,\ b$ は定数である．次の各問に答えなさい．

(1) (i) $a,\ b$ の値をそれぞれ求めなさい．
(ii) 関数 $f(x)$ の導関数を求めなさい．
(iii) 点 U，V，W の座標をそれぞれ求めなさい．
(iv) 3 つの曲線 $C_f,\ C_g,\ C_h$ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(2) 直線 $L: y=\beta x$ と曲線 $C_f,\ C_g$ との交点をそれぞれ P，Q とし，それらの x 座標をそれぞれ $p,\ q$ とする．点 P，Q からそれぞれ x 軸に垂線 PA，QB を下ろす．△PUA の面積と △QUB の面積の和を S とする．ただし，$2<p\leqq 4$ とする．
(i) $\beta,\ q,\ S$ をそれぞれ p の式で表しなさい．
(ii) S が最大になるときの p の値を求めなさい．
(iii) 直線 L が曲線 C_h に接するとき，その接点の座標を求めなさい．

(20 帯広畜産大 10)

【答】

(1) (i) $a=-1,\ b=2$
(ii) $f'(x)=-2x+4$
(iii) $\mathrm{U}(0,\ 0)$，$\mathrm{V}(4,\ 0)$，$\mathrm{W}(2,\ 0)$
(iv) 8

(2) (i) $\beta=4-p,\ q=p-2,\ S=(4-p)(p^2-2p+2)$
(ii) $p=2+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
(iii) $\left(2\sqrt{2},\ 12\sqrt{2}-16\right)$

【解答】

$$C_f: y=f(x)=ax^2+2bx$$
$$C_g: y=g(x)=ax^2+bx$$
$$C_h: y=h(x)=a(x-2)^2+b(x-2)$$

(1) (i) $f'(x)=2ax+2b$ であり，$f(x)$ は点 $(2,\ 4)$ で極値をとるから

$$\begin{cases} f(2)=4 \\ f'(2)=0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} 4a+4b=4 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \qquad \therefore\quad a=-1,\ b=2$$

が必要である．
　このとき

$$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$$

であり，$f'(x)$ は $x=2$ で符号を変えるから，$x=2$ で極値をとる (十分).

よって

$$\boldsymbol{a=-1,\ b=2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(ii) (i) の結果より

$$\boldsymbol{f'(x)=-2x+4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(iii)

$$C_f : y=f(x)=-x^2+4x$$

$$C_g : y=g(x)=-x^2+2x$$

$$C_h : y=h(x)=-(x-2)^2+2(x-2)=-x^2+6x-8$$

C_f と C_g の交点の x 座標は

$$-x^2+4x=-x^2+2x \qquad \therefore \quad x=0$$

C_f と C_h の交点 x 座標は

$$-x^2+4x=-x^2+6x-8 \qquad \therefore \quad x=4$$

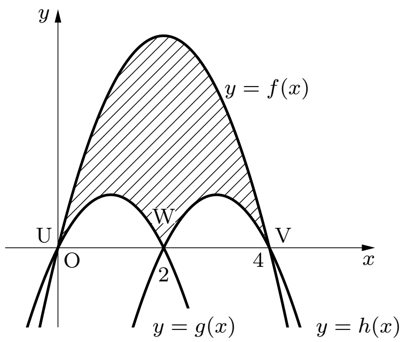
C_g と C_h の交点 x 座標は

$$-x^2+2x=-x^2+6x-8 \qquad \therefore \quad x=2$$

であるから，それぞれの交点 U，V，W の座標は

$$\mathbf{U(0,\ 0),\quad V(4,\ 0),\quad W(2,\ 0)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.



(iv) 3 つの曲線 C_f，C_g，C_h で囲まれた部分は直線 $x=2$ に関して対称であるから，求める面積は

$$\begin{aligned}2\int_0^2 \{f(x)-g(x)\}\,dx &= 2\int_0^2 \{(-x^2+4x)-(-x^2+2x)\}\,dx\\ &= 2\int_0^2 2x\,dx\\ &= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\\ &= \boldsymbol{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である.

(2) (i)

$$L : y=\beta x$$

p は L と C_f の交点 P の x 座標であるから

$$\beta p=-p^2+4p$$

$$p(p+\beta-4)=0$$

p は $2<p\leqq 4$ を満たすから

$$p+\beta-4=0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\beta=4-p} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

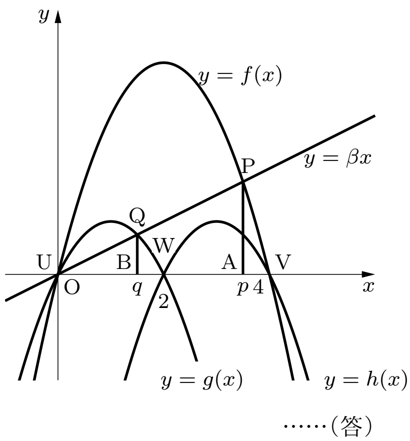
である.

q は L と C_g の交点 Q の x 座標であるから

$$\beta q=-q^2+2q$$

$$q(q+\beta-2)=0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{q}=2-\beta=2-(4-p)=\boldsymbol{p-2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$



である ($\triangle$QUB の存在を考え，$q \fallingdotseq 0$ とした).
　よって

$$
\begin{aligned}
S &= \triangle\mathrm{PUA} + \triangle\mathrm{QUB} \\
&= \frac{1}{2}p \cdot \beta p + \frac{1}{2}q \cdot \beta q \\
&= \frac{\beta}{2} \cdot (p^2 + q^2) \\
&= \frac{4-p}{2}\{p^2 + (p-2)^2\} \\
&= \frac{1}{2}(4-p)(2p^2 - 4p + 4) \\
&= \boldsymbol{(4-p)(p^2 - 2p + 2)}
\end{aligned}
$$
……(答)

である．

(ii) (i) より

$$S = -p^3 + 6p^2 - 10p + 8$$

であるから

$$
\begin{aligned}
S' &= -3p^2 + 12p - 10 \\
&= -3(p-2)^2 + 2
\end{aligned}
$$

　$2 < p \leqq 4$ における S の増減は右表となるから，S が最大になるときの p の値は

p	(2)	$\cdots$	$2+\sqrt{\dfrac{2}{3}}$	$\cdots$	4
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

$$p = 2 + \sqrt{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{2 + \frac{\sqrt{6}}{3}}$$
……(答)

である．

(iii) L が C_h に接するのは

$$
\begin{aligned}
&\beta x = -x^2 + 6x - 8 \\
\therefore\quad & x^2 + (\beta - 6)x + 8 = 0 \\
\therefore\quad & x^2 - (p+2)x + 8 = 0 \quad (\because\ \beta = 4 - p) \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

が重解をもつときである．(判別式) $= 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
&(p+2)^2 - 4 \cdot 8 = 0 \\
\therefore\quad & p + 2 = \pm 4\sqrt{2} \\
\therefore\quad & p = 4\sqrt{2} - 2 \quad (\because\ 2 < p \leqq 4)
\end{aligned}
$$

このとき ① の解は

$$x = \frac{p+2}{2} = 2\sqrt{2}$$

であり，接点の y 座標は

$$y = (4-p)x = (6 - 4\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2} - 16$$

である．よって，接点の座標は

$$\boldsymbol{(2\sqrt{2},\ 12\sqrt{2} - 16)}$$
……(答)

である．