次の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．

x の 3 次方程式

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 16 - a = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．ただし，a は定数とする．このとき，次のことがいえる．

(1) 3 次方程式 ① が異なる 3 個の実数解をもつような a の値の範囲を求めよう．

①を $x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = a$ と変形する．

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$$

とおくと，

$$f'(x) = \boxed{ア}\left(x - \boxed{イ}\right)\left(x - \boxed{ウ}\right)$$

である．ただし，$\boxed{イ} < \boxed{ウ}$ である．

よって，関数 $f(x)$ は，

$x = \boxed{イ}$ のとき，極大値 $\boxed{エ}$，

$x = \boxed{ウ}$ のとき，極小値 $\boxed{オ}$

をとる．

したがって，① が異なる 3 個の実数解をもつのは

$$\boxed{カ} < a < \boxed{キ}$$

のときである．

(2) $a = \boxed{キ}$ のとき，① の解を求めると，

$$x = \boxed{ク},\ \boxed{ケ}$$

である．ただし，$\boxed{ク} < \boxed{ケ}$ である．

このとき，直線 $y = a$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積は，

$$\frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$$

である．

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コサ	シ
3	2	4	4	0	0	4	2	5	27	4

【解答】

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 16 - a = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1)
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$$
$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$
$$= \boxed{\mathbf{3}}\left(x - \boxed{\mathbf{2}}\right)\left(x - \boxed{\mathbf{4}}\right)$$
…… (ア〜ウの答)

である．$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，関数 $f(x)$ は

$x = 2$ のとき，極大値 $\boxed{\mathbf{4}}$， …… (エの答)

$x = 4$ のとき，極小値 $\boxed{\mathbf{0}}$ …… (オの答)

をとる．

① が異なる 3 個の実数解をもつのは，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ が 3 個の共有点をもつときであるから

$$(\text{極小値}) < a < (\text{極大値})$$

のときであり

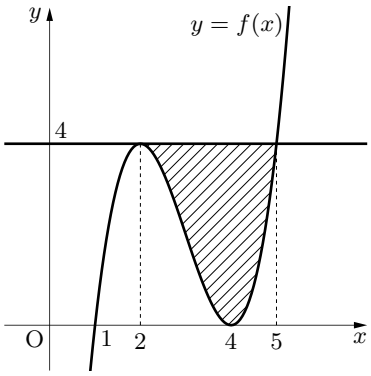
$$\boxed{\mathbf{0}} < a < \boxed{\mathbf{4}}$$
…… (カ，キの答)

である．

(2) $a = 4$ のとき，① の解を求めると

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$$
$$(x-2)^2(x-5) = 0$$
$$\therefore \quad x = \boxed{\mathbf{2}},\ \boxed{\mathbf{5}}$$
…… (ク，ケの答)

である．このとき，直線 $y = a$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積 S は



$$S = \int_2^5 \{5 - f(x)\}\,dx$$
$$= -\int_2^5 (x-2)^2(x-5)\,dx$$
$$= -\int_2^5 \{(x-2)^3 - 3(x-2)^2\}\,dx$$
$$= -\left[\frac{(x-2)^4}{4} - 3\frac{(x-2)^3}{3}\right]_2^5$$
$$= -\left(\frac{3^4}{4} - 3^3\right)$$
$$= \frac{\boxed{\mathbf{27}}}{\boxed{\mathbf{4}}}$$
…… (コサ，シの答)

である．