正の整数 n に対して,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}, \quad d_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k^2$$

とする.

(1) a_n を求めよ.
(2) b_n を求めよ.
(3) c_n を求めよ.
(4) d_n を求めよ.
(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n}$ を求めよ.

(20 千葉大 9)

【答】

(1) $a_n = 2^n$
(2) $b_n = n2^{n-1}$
(3) $c_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$
(4) $d_n = n(n+1)2^{n-2}$
(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n} = 1$

【解答】

(1) 二項定理 $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k y^{n-k}$ より

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = (1+1)^n = \boldsymbol{2^n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(2) ${}_n\mathrm{C}_k k = n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ であるから

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k = n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k = \boldsymbol{n2^{n-1}} \quad (\because\ (1)) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

- ${}_n\mathrm{C}_k k = n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ について

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k &= \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot k \\ &= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\end{aligned}$$

である.
　あるいは, n 人の中から k 人を選びその k 人の中からリーダーを一人選ぶ選び方は

$${}_n\mathrm{C}_k \times {}_k\mathrm{C}_1 = {}_n\mathrm{C}_k k \text{ (通り)}$$

である. これは n 人の中から 1 人を選びこの人をリーダーとする k 人のグループの作り方の総数と一致する. この総数はリーダーに集まる $k-1$ 人の選び方も考えると

$${}_n\mathrm{C}_1 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \text{ (通り)}$$

であるから

$${}_n\mathrm{C}_k k = n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

である.

- 二項定理より

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k \qquad \cdots\cdots ㋐$$

である．㋐ の辺々を微分すると

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_k k x^{k-1} \qquad \cdots\cdots ㋑$$

である．$x=1$ を代入すると

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_k k \qquad \therefore \quad b_n = n2^{n-1}$$

である．

(3) $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \dfrac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}{n+1}$ であるから

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\{(1+1)^{n+1} - {}_{n+1}\mathrm{C}_0\} \\ &= \boldsymbol{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ㋐ の辺々を区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で積分すると

$$\int_0^1 (x+1)^n\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k\right) dx$$

$$\left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} \qquad \therefore \quad c_n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

である．

(4) $k^2 = k(k-1)+k$ であるから

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k^2 = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k(k-1) + \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k \\ &= \sum_{k=2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k k(k-1) + b_n \end{aligned}$$

が成り立つ．${}_n\mathrm{C}_k k(k-1) = n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ $(2 \leqq k \leqq n)$ であるから

$$\begin{aligned} d_n &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} {}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} + b_n \\ &= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2}\mathrm{C}_k + b_n \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \quad (\because\ (1),\ (2)) \\ &= \boldsymbol{n(n+1)2^{n-2}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ${}_n\mathrm{C}_k k(k-1) = n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ $(2 \leqq k \leqq n)$ について

$${}_n\mathrm{C}_k k(k-1) = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot k(k-1) = \frac{n(n+1)\cdot(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} = n(n+1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$$

である．

あるいは，n 人の中から k 人を選びその k 人の中からリーダーを一人選び，次に残った $k-1$ 人の中からサブリーダーを一人選ぶ選び方は

$$ {}_n\mathrm{C}_k \times {}_k\mathrm{C}_1 \times {}_{k-1}\mathrm{C}_1 = {}_n\mathrm{C}_k k(k-1) \ (\text{通り}) $$

ある．これは n 人の中から 1 人を選び，さらに残った $n-1$ 人の中からサブリーダーを一人選ぶ．この二人をリーダー，サブリーダーとする k 人のグループをつくる．その総数はリーダー，サブリーダーの二人に集まる $k-2$ 人の選び方も考えると

$$ {}_n\mathrm{C}_1 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_1 \times {}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} = n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} \ (\text{通り}) $$

である．よって

$$ {}_n\mathrm{C}_k k(k-1) = n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} $$

が成り立つ．

- ㋑ の辺々に x をかけると

$$ nx(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_k k x^k $$

となる．辺々を微分すると

$$ n \cdot 1 \cdot (x+1)^{n-1} + nx \cdot (n-1)(x+1)^{n-2} = \sum_{k=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_k k^2 x^{k-1} $$

を得る．$x=1$ を代入すると

$$ \begin{aligned} n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} &= \sum_{k=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_k k^2 \\ n(n+1)2^{n-2} &= \sum_{k=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_k k^2 \\ \therefore \quad d_n &= n(n+1)2^{n-2} \end{aligned} $$

である．

(5) (1)〜(4) より

$$ \begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot n2^{n-1}}{\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1} \cdot n(n+1)2^{n-2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}} \\ &= \mathbf{1} \end{aligned} $$

……(答)

である．