曲線 $C_k : y = e^{-kx}$ (k は自然数, x は正の実数) について考える．曲線 C_k 上の点 $\mathrm{P}_k(t,\ e^{-kt})$ (t は正の実数) における曲線 C_k の接線を L_k とし，L_k と x 軸との交点を A_k，L_k と y 軸との交点を B_k とする．(原点を O とする)

(1) $k=1$ のとき，$\triangle \mathrm{OA_1B_1}$ の面積は，$t = \boxed{17}$ で最大値 $\boxed{18}$ となる．

(2) $\triangle \mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k$ の面積は，$t = \boxed{19}$ のとき，最大値 $\boxed{20}$ をとる．

(3) $\triangle \mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k$ の面積の最大値を S_k とする．

無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ は，$\boxed{21}$ することになる．

(20 自治医大 17)

【答】

17	18	19	20	21
1	$\dfrac{2}{e}$	$\dfrac{1}{k}$	$\dfrac{2}{ke}$	発散

【解答】

(1) $k=1$ のとき，$C_1 : y = e^{-x}$ より $y' = -e^{-x}$ であり，$\mathrm{P}_1(t,\ e^{-t})$ における接線 L_1 の方程式は

$$y = -e^{-t}(x-t) + e^{-t}$$
$$\therefore\quad y = -e^{-t}x + (t+1)e^{-t}$$

である．このとき，L_1 の x 切片 A_1，y 切片 B_1 の座標は

$$\mathrm{A}_1(t+1,\ 0),\quad \mathrm{B}_1(0,\ (t+1)e^{-t})$$

であり

$$\triangle \mathrm{OA_1B_1} = \frac{1}{2}(t+1)^2 e^{-t}$$

である．$f_1(t) = \dfrac{1}{2}(t+1)^2 e^{-t}$ とおくと

$$f_1{}'(t) = (t+1)e^{-t} - \frac{1}{2}(t+1)^2 e^{-t}$$
$$= -\frac{1}{2}(t+1)(t-1)e^{-t}$$

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

右の増減表より，$\triangle \mathrm{OA_1B_1}$ の面積は

$$t = \mathbf{1} \text{ で最大値 } \boldsymbol{\frac{2}{e}}$$ ……(答)

となる．

(2) $C_k : y = e^{-kx}$，$y' = -ke^{-kx}$ より，$\mathrm{P}_k(t,\ e^{-kt})$ における接線 L_k の方程式は

$$y = -ke^{-kt}(x-t) + e^{-kt}$$
$$\therefore\quad y = -ke^{-kt}x + k\left(t + \frac{1}{k}\right)e^{-kt}$$

である．このとき，L_1 の x 切片 A_1，y 切片 B_1 の座標は

$$\mathrm{A}_k\left(t + \frac{1}{k},\ 0\right),\quad \mathrm{B}_k\left(0,\ k\left(t + \frac{1}{k}\right)e^{-kt}\right)$$

であり

$$\triangle \mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k = \frac{1}{2}k\left(t+\frac{1}{k}\right)^2 e^{-kt}$$

である．$f(t) = \dfrac{1}{2}k\left(t+\dfrac{1}{k}\right)^2 e^{-kt}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= k\left(t+\frac{1}{k}\right)e^{-kt} - \frac{1}{2}k^2\left(t+\frac{1}{k}\right)^2 e^{-kt} \\ &= -\frac{1}{2}k^2\left(t+\frac{1}{k}\right)\left(t-\ \frac{1}{k}\right)e^{-kt} \end{aligned}$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{k}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

右の増減表より，$\triangle \mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k$ の面積は

$$t = \boldsymbol{\frac{1}{k}} \text{ のとき，最大値 } \frac{1}{2}k\left(\frac{2}{k}\right)^2 \cdot e^{-1} = \boldsymbol{\frac{2}{ke}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

- (1) の利用を考える．

  x 軸方向に $\dfrac{1}{k}$ (>0) 倍する変換 $\begin{cases} X = \dfrac{x}{k} \\ Y = y \end{cases}$ により，$C_1 : y = e^{-x}$ は，$Y = e^{-kX}$

  すなわち $C_k : y = e^{-kx}$ に移る．

  この変換により，点 $\mathrm{P}(1,\ e^{-1})$ は $\mathrm{P}'\left(\dfrac{1}{k},\ e^{-1}\right)$ に移り，$\triangle \mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k$ の面積は

  $$t = \frac{1}{k} \text{のとき，最大値 } \frac{1}{k} \times \frac{2}{e} = \frac{2}{ke}$$

  をとることが分かる．

(3)
$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_n = \frac{2}{e}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

ここで，$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とする．$n \geqq 2$ のとき，$2^l \leqq n < 2^{l+1}$ をみたす自然数 l が存在し，$\dfrac{1}{2^l} \geqq \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2^{l+1}}$ である．$n \to \infty$ のとき $l \to \infty$ であるから

$$\begin{aligned} T_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2^l} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\geqq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{2^l} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &\quad \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^l} + \cdots + \frac{1}{2^l}\right)}_{2^{l-1}\text{個の和}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{2^{l-1}}{2^l} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \times l \\ &\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \infty \end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_n$ は **発散** することになる． ……(答)