$0 < r < 1$ とし，半径 1 の円 C_1 と半径 r の円 C_2 の中心は一致しているとする．円 C_1 に内接し，円 C_2 に外接する円をできるだけたくさん描く．ただし，どの 2 つの円も共有点の個数は 1 以下とする．描いた円の円周の長さの総和を $f(r)$ とするとき，

$$\lim_{r\to 1-0} f(r)$$

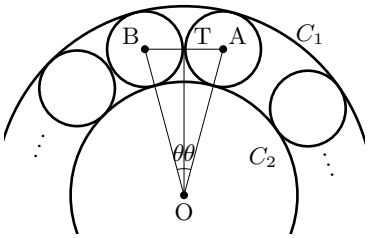
を求めよ．

(20 信州大 理・医 7)

【答】 $2\pi^2$

【解答】

C_1，C_2 の中心を O，C_1 に内接し C_2 に外接しながら互いに外接する 2 つの円の中心を A，B，半径を R とおく．この 2 円の接点 T は線分 AB の中点であり，$\angle\mathrm{AOT} = \theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと



$$\mathrm{AT} = R = \frac{1-r}{2},$$
$$\mathrm{OA} = \frac{1+r}{2}$$

である．

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}} = \frac{1-r}{1+r} \qquad \cdots\cdots ①$$

であり，描いた円の個数を n とすると，描いた円の円周の長さの総和 $f(r)$ は

$$f(r) = n\cdot 2\pi R = n\pi(1-r)$$

である．円はできるだけたくさん描いているから

$$n\cdot 2\theta \leqq 2\pi < (n+1)2\theta$$
$$\frac{\pi}{\theta} - 1 < n \leqq \frac{\pi}{\theta}$$
$$\frac{\pi^2(1-r)}{\theta} - \pi(1-r) < n\pi(1-r) \leqq \frac{\pi^2(1-r)}{\theta}$$
$$\therefore\quad \frac{\pi^2(1-r)}{\theta} - \pi(1-r) < f(r) \leqq \frac{\pi^2(1-r)}{\theta} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

ここで，① より

$$\lim_{r\to 1-0}\sin\theta = \lim_{r\to 1-0}\frac{1-r}{1+r} = 0 \qquad \therefore\quad \lim_{r\to 1-0}\theta = 0$$

であり

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 1-0}\frac{\pi^2(1-r)}{\theta} &= \lim_{r\to 1-0}\frac{\pi^2(1+r)\sin\theta}{\theta} \quad (\because ①)\\ &= \lim_{r\to 1-0}\left\{\pi^2(1+r)\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\right\}\\ &= \pi^2\cdot 2\cdot 1\\ &= 2\pi^2\end{aligned}$$

となる．$r \to 1-0$ のとき，②の第 1 辺，第 3 辺はともに $2\pi^2$ に収束するから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{r\to 1-0} f(r) = \boldsymbol{2\pi^2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．