$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\tan^2 x}$$

(20 学習院大 理 1(2))

【答】 $\dfrac{9}{2}$

【解答】

$\dfrac{0}{0}$ の不定形を解消するように，式を変形する．

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\tan^2 x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot 2\sin^2\frac{3x}{2}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left\{\cos^2 x\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}\cdot\frac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x^2}\right\}\\
&= \lim_{x\to 0}\left\{\cos^2 x\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sin\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{3x}{2}}\right)^2\cdot\frac{3^2}{2}\right\}\\
&= \boldsymbol{\frac{9}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

- 次のように変形してもよい．

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\tan^2 x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{1+\cos 3x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{\cos^2 x}{1+\cos 3x}\cdot\left(\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}\right)^2\cdot\frac{\sin^2 3x}{x^2}\right\}\\
&= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{\cos^2 x}{1+\cos 3x}\cdot\left(\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 3^2\right\}\\
&= \frac{1}{1+1}\cdot\left(\frac{1}{1}\right)^2\cdot 1^2\cdot 9\\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

である．