次の極値を求めよ．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+2x})$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

(20 茨城大 工 1(1))

【答】

(i) $\dfrac{3}{2}$

(ii) $\dfrac{1}{2}$

【解答】

(i) $\infty-\infty$ の不定形を解消するように，式を変形すると

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+2x})\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+2x})(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+2x}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+5x)-(x^2+2x)}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+2x}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+2x}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\\
&=\boldsymbol{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

……(答)

である

(ii) $\infty\cdot 0$ の不定形を解消するように，式を変形する．$\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\\
&=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}\\
&=\lim_{\theta\to 0}\left\{\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\right\}\\
&=1^2\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

……(答)

である．

- 次のように変形してもよい．

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\\
&=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}\\
&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}\\
&=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

である．