導関数の定義にしたがって，関数 $\cos x$ の導関数が $-\sin x$ であることを示せ．ただし，必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ であることを証明なしに用いてよい．

(20 愛知教大 4)

【答】 略

【解答】

導関数の定義より

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h-\sin x\sin h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(-\cos x\cdot\frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)}-\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(-\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h}-\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ であるから

$$
\begin{aligned}
(\cos x)\,' &= -\cos x\cdot 1\cdot\frac{0}{1+1}-\sin x\cdot 1\\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

よって，関数 $\cos x$ の導関数は $-\sin x$ である． …… (証明終わり)

- 和を積に直す公式を用いて式を変形してもよい．

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}\\
&= -\sin(x+0)\cdot 1\\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$