点 $(a,\ 0)$ を通り，曲線 $y=e^{-x}-e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

(20 九州大 理系 1)

【答】 $a \leqq 0,\ \dfrac{3}{2}+2\log 2 \leqq a$

【解答】

$$y=e^{-x}-e^{-2x}$$

$$y'=-e^{-x}+2e^{-2x}$$

曲線 $y=e^{-x}-e^{-2x}$ 上の点 $\left(t,\ e^{-t}-e^{-2t}\right)$ における接線の方程式は

$$y=(-e^{-t}+2e^{-2t})(x-t)+e^{-t}-e^{-2t}$$

である．この直線が点 $(a,\ 0)$ を通る条件は

$$0=(-e^{-t}+2e^{-2t})(a-t)+e^{-t}-e^{-2t} \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす実数 t が存在することである．両辺に e^{2t} を掛けて変形すると

$$① \iff (e^t-2)(a-t)=e^t-1$$

$e^t-2=0$ とすると，① は $0=1$ となり不合理．$e^t-2 \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$ であるから

$$① \iff a=t+\frac{e^t-1}{e^t-2}$$

$f(t)=t+\dfrac{e^t-1}{e^t-2}$ とおき，$f(t)=a$ を満たす実数 t が存在するための a の値の範囲を求める．すなわち，曲線 $y=f(t)$ と直線 $y=a$ が共有点をもつための a の値の範囲を求める．

$$\begin{aligned} f'(t)&=1+\frac{e^t(e^t-2)-(e^t-1)e^t}{(e^t-2)^2} \\ &=\frac{(e^{2t}-4e^t+4)-e^t}{(e^t-2)^2} \\ &=\frac{(e^t-1)(e^t-4)}{(e^t-2)^2} \end{aligned}$$

$f(t)$ の増減は下の表となる．

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$(\log 2)$	$\cdots$	$2\log 2$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

さらに

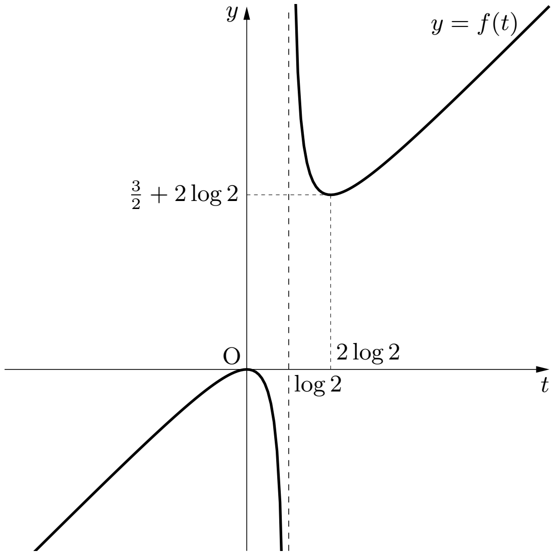
$$f(0)=0, \quad f(2\log 2)=2\log 2+\frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2}+2\log 2$$

また，$f(t)=t+1+\dfrac{1}{e^t-2}$ より

$$\lim_{t\to-\infty} f(t)=-\infty, \quad \lim_{t\to\infty} f(t)=\infty$$

$$\lim_{t\to\log 2-0} f(t)=-\infty, \quad \lim_{t\to\log 2+0} f(t)=\infty$$

であるから $y=f(t)$ のグラフは下図となる．



よって，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a \leqq 0,\ \frac{3}{2} + 2\log 2 \leqq a} \qquad \cdots\cdots（答）$$