関数

$$f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x+1}} \quad (x \geqq 0)$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) $f(x)$ とその導関数の極限

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

をそれぞれ求めよ．ただし，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}=0$$

であることを用いてもよい．

(3) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸を調べる必要はない．

(20 大阪大 理系 1)

【答】

(1) $e^{\frac{1}{e}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

(3) 略

【解答】

$$f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x+1}} \quad (x \geqq 0)$$

(1) $x \geqq 0$ において，$f(x)>0$ であるから，両辺の対数をとることができる．

$$\log f(x)=\frac{1}{x+1}\log(x+1)$$

両辺を微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\log(x+1)+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}f(x)$$

$f'(x)$ の符号は $1-\log(x+1)$ の符号と一致するから，増減表は右のようになる．$f(x)$ の最大値は

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

$$f(e-1)=\boldsymbol{e^{\frac{1}{e}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2)
$$\lim_{x\to\infty}\log f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1}=0 \qquad \left(\because\ \lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0\right)$$

対数関数の連続性より

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

また

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f'(x) &= \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}f(x)\right\}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{x+1}-\frac{\log(x+1)}{x+1}\right)\frac{f(x)}{x+1}\right\}\\ &= (0-0)\cdot 0\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

……(答)

(3) (1)，(2) と $f(0)=1$ より $y=f(x)$ のグラフは下のようになる．