関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{(2x+1)(x^2+x+1)}$$

と定める．

(1) $f(x)=\dfrac{a}{2x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$ が成り立つように定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\sin(2x)\,dx$ の値を求めよ．

(20 室蘭工大 理工 2)

【答】

(1) $(a,\ b,\ c)=(-3,\ 2,\ 1)$

(2) $-\dfrac{3}{2}\log|2x+1|+\log|x^2+x+1|+C$　(C は積分定数)

(3) $-\dfrac{1}{2}\log 3$

【解答】

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{(2x+1)(x^2+x+1)}\qquad\cdots\cdots ①$$

(1) 右辺を整理すると

$$\begin{aligned}&\frac{a}{2x+1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}\\ =\ &\frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(2x+1)}{(2x+1)(x^2+x+1)}\\ =\ &\frac{(a+2b)x^2+(a+b+2c)x+a+c}{(2x+1)(x^2+x+1)}\qquad\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

であり

$$f(x)=\frac{a}{2x+1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

となる条件は，① と ② の分子を比較して

$$\begin{cases}a+2b=1 & \cdots\cdots ③\\ a+b+2c=1 & \cdots\cdots ④\\ a+c=-2 & \cdots\cdots ⑤\end{cases}$$

を満たすことである．③ + ④ + ⑤ より

$$\begin{aligned}&3a+3b+3c=0\\ \therefore\quad &a+b+c=0\end{aligned}$$

であることを利用すると

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=(-3,\ 2,\ 1)}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $F(x)=\int f(x)dx$ とすると，(1) より

$$F(x)=\int\left(\frac{-3}{2x+1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx$$
$$=\boldsymbol{-\frac{3}{2}\log|2x+1|+\log|x^2+x+1|+C}\quad(\boldsymbol{C}\text{ は積分定数})\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\sin(2x)\,dx$ とし，置換積分法を用いる．

$t=\cos^2 x$ とおくと

$$dt=2\cos x(-\sin x)\,dx=-\sin 2x\,dx$$

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	1	$\longrightarrow$	0

であるから

$$I=\int_1^0 f(t)(-dt)=\int_0^1 f(t)dt$$
$$=\Big[F(t)\Big]_0^1=F(1)-F(0)$$
$$=\left(-\frac{3}{2}\log 3+\log 3\right)-\left(-\frac{3}{2}\log 1+\log 1\right)$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\log 3}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．