$0 < x < \dfrac{2}{3}\pi$ の範囲において，方程式 $\sin x = \dfrac{2}{\pi}x$ の解は $x = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ であるので，

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \left|\sin x - \frac{2}{\pi}x\right| dx = \frac{\boxed{\text{イ}} - \pi}{\boxed{\text{ウエ}}}$$

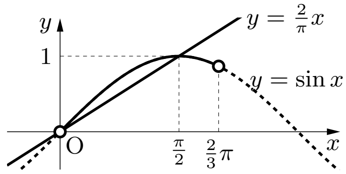
となる．

(20 明治大 理工・政経・数理 1)

【答】

ア	イ	ウエ
2	9	18

【解答】



方程式 $\sin x = \dfrac{2}{\pi}x$ の解は $y = \sin x$ のグラフと直線 $y = \dfrac{2}{\pi}x$ の交点の x 座標である．

$y = \sin x$ と $y = \dfrac{2}{\pi}x$ のグラフはともに点 $(0,\ 0)$ と $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$ を通り，$y = \sin x$ のグラフは $0 < x < \dfrac{2}{3}\pi$ の範囲で上に凸であるから，この範囲での交点は $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$ のみである．

したがって，求める解は，$x = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ である．……(答)

$\sin x - \dfrac{2}{\pi}x$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ の符号は正から負に変わるから

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \left|\sin x - \frac{2}{\pi}x\right| dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} -\left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right) dx \\
&= \left[-\cos x - \frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\cos x - \frac{x^2}{\pi}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \\
&= 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) - (-1) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{9}\pi\right) \\
&= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{4}{9}\pi \\
&= \boldsymbol{\frac{9 - \pi}{18}}
\end{aligned}$$
……(答)

となる．