

次の積分を計算しなさい.

(i) $\int 2x \log |x+1| dx$

(ii) $\int \frac{x}{2\sqrt{x+1}} dx$

(20 福島大 人文社会 1(3))

【答】

(i) $(x^2 - 1) \log |x+1| - \frac{1}{2}(x-1)^2 + C$ (C は積分定数)

(ii) $\frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C$ (C は積分定数)

【解答】

(i) 部分積分法を用いる.

$$\begin{aligned} & \int 2x \log |x+1| dx \\ &= (x^2 - 1) \log |x+1| - \int (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x+1} dx \\ &= (x^2 - 1) \log |x+1| - \int (x-1) dx \\ &= (x^2 - 1) \log |x+1| - \frac{1}{2}(x-1)^2 + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(ii) 被積分関数の分子を変形する.

$$\begin{aligned} & \int \frac{x}{2\sqrt{x+1}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)-1}{\sqrt{x+1}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} \right\} + C \\ &= \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

● 部分積分法を用いる.

$$\begin{aligned} & \int \frac{x}{2\sqrt{x+1}} dx \\ &= x \cdot \sqrt{x+1} - \int 1 \cdot \sqrt{x+1} dx \\ &= x\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C \\ &= \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$