定義域を $0 \leqq x \leqq 1$ とする関数 $f_n(x)$ と $f(x)$ を以下で定める．

$$f_1(x)=0, \quad f_{n+1}(x)=\int_0^x (f_n(t)-1)^2\,dt \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$

(1) 正の整数 n に対して，不等式

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 正の整数 n に対して，不等式

$$(-1)^n f_n(x) \geqq (-1)^n f(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ．

(3) 実数 a $(0 \leqq a \leqq 1)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ を求めよ．

(20 千葉大 11)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(a)=\frac{a}{a+1}$

【解答】

$$f_1(x)=0, \quad f_{n+1}(x)=\int_0^x (f_n(t)-1)^2\,dt \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$

(1) 正の整数 n に対して，不等式

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1) \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$f_1(x)=0$ であるから，$n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$0 \leqq f_k(x) \leqq 1 \quad (\because\ 帰納法の仮定)$$

であり

$$-1 \leqq f_k(x)-1 \leqq 0$$
$$\therefore \quad 0 \leqq (f_k(x)-1)^2 \leqq 1$$

である．$0 \leqq x \leqq x$ で積分すると

$$0 \leqq \int_0^x (f_k(t)-1)^2\,dt \leqq \int_0^x dt$$
$$\therefore \quad 0 \leqq f_{k+1}(x) \leqq x \ (\leqq 1)$$

$n=k+1$ のときも $(**)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての正の整数 n に対して $(*)$ が成り立つことが示された．

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) $g_n(x) = (-1)^n\{f_n(x) - f(x)\}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおき，正の整数 n に対して，不等式

$$g_n(x) \geqq 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1) \qquad \cdots\cdots (**)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき

$$g_1(x) = -\{f_1(x) - f(x)\} = -\left(0 - \frac{x}{x+1}\right) = \frac{x}{x+1} \geqq 0$$

であり，$n = 1$ のとき $(**)$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ での成立を仮定する．

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x) &= (-1)^{k+1}\{f_{k+1}(x) - f(x)\} \\ &= (-1)^{k+1}\left\{\int_0^x (f_k(t)-1)^2\,dt - \frac{x}{x+1}\right\} \end{aligned}$$

微分すると

$$\begin{aligned} {g_{k+1}}'(x) &= (-1)^{k+1}\left\{(f_k(x)-1)^2 - \frac{1}{(x+1)^2}\right\} \\ &= (-1)^{k+1}\left(f_k(x) - 1 + \frac{1}{x+1}\right)\left(f_k(x) - 1 - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= (-1)^{k+1}\left(f_k(x) - \frac{x}{x+1}\right)\left(f_k(x) - 1 - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= (-1)^k\,(f_k(x) - f(x))\left(1 + \frac{1}{x+1} - f_k(x)\right) \\ &= g_k(x)\left(1 + \frac{1}{x+1} - f_k(x)\right) \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

帰納法の仮定より $g_k(x) \geqq 0$ である．また，(1) より $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $1 - f_k(x) \geqq 0$ であるから，$0 \leqq x \leqq 1$ においては $1 + \dfrac{1}{x+1} - f_k(x) \geqq 0$ である．したがって，

$${g_{k+1}}'(x) \geqq 0 \ (0 \leqq x \leqq 1)$$

であり，$0 \leqq x \leqq 1$ において $g_{k+1}(x)$ は増加関数である．

$$g_{k+1}(x) \geqq g_{k+1}(0) = (-1)^{k+1}\left\{\int_0^0 (f_k(t)-1)^2\,dt - 0\right\} = (-1)^{k+1}(0-0) = 0$$

となり，$n = k+1$ のときも $(**)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての正の整数 n に対して $(**)$ が成り立つことが示された．すなわち，すべての正の整数 n に対して

$$(-1)^n f_n(x) \geqq (-1)^n f(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……(証明終わり)

(3) ① より

$$g_{n+1} = \int_0^x g_k(t)\left(1 + \frac{1}{t+1} - f_k(t)\right)dt \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

である．$0 \leqq t \leqq x \leqq 1$ であり，$1 + \dfrac{1}{t+1} - f_k(t) \leqq 1 + \dfrac{1}{0+1} - 0 \leqq 2$ であるから

$$g_{n+1} \leqq 2\int_0^x g_k(t)\,dt \quad (0 \leqq x \leqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

$$g_1(x) = \frac{x}{x+1} \leqq x \qquad \cdots\cdots ③$$

であり

$$g_2(x) \leqq 2\int_0^x g_1(t)\,dt \leqq 2\int_0^x t\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = x^2$$
$$g_3(x) \leqq 2\int_0^x g_2(t)\,dt \leqq 2\int_0^x t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{2}{3}x^3$$
$$g_4(x) \leqq 2\int_0^x g_3(t)\,dt \leqq 2\int_0^x \frac{2}{3}t^3\,dt = 2\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^x = \frac{2\cdot 2}{3\cdot 4}x^4$$
$$g_5(x) \leqq 2\int_0^x g_4(t)\,dt \leqq 2\int_0^x \frac{2\cdot 2}{3\cdot 4}t^4\,dt = 2\cdot\frac{2\cdot 2}{3\cdot 4}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^x = \frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5}x^5$$

であるから

$$g_n(x) \leqq \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}^{n-2\text{ 個}}}{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n}x^n = \frac{2}{2}\cdot\frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}^{n-2\text{ 個}}}{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n}x^n = \frac{2^{n-1}}{n!}x^n$$

と推定される．

正の整数 n に対して，不等式

$$g_n(x) \leqq \frac{2^{n-1}}{n!}x^n \quad (0 \leqq x \leqq 1) \qquad \cdots\cdots (***)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

③ より，$n=1$ のとき $(***)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x) &\leqq 2\int_0^x g_k(t)\,dt \leqq 2\int_0^x \frac{2^{k-1}}{k!}t^k\,dt \quad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\ &= 2\cdot\frac{2^{k-1}}{k!}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = 2\cdot\frac{2^{k-1}}{k!}\,\frac{x^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{2^k}{(k+1)!}x^{k+1} \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，すべての正の整数 n に対して $(***)$ が成り立つことが示された．

$(**)$ とあわせると

$$0 \leqq g_n(x) \leqq \frac{2^{n-1}}{n!}x^n \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成り立つ．$x=a$ とおくと

$$0 \leqq g_n(a) \leqq \frac{2^{n-1}}{n!}a^n = \overbrace{\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{n}}^{n-1\text{ 個}}a^n \leqq 1\cdot\overbrace{\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}}^{n-2\text{ 個}}a^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}a^n$$

が成り立つ．$0 \leqq a \leqq 1$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}a^n = 0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} g_n(a) = 0$$
$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n\{f_n(a) - f(a)\} = 0$$
$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a) = \boldsymbol{\frac{a}{a+1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．