n を自然数とする．関数 $f_n(x)$ を $f_n(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos t+\sin 2nt)^2\,dt$ で定義する．また，各 n に対して $f_n(x)$ の最小値を a_n とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 nt\,dt$ および $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2nt\,dt$ を求めよ．
(2) a_n を n を用いて表せ．
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(20 札幌医大 2)

【答】

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 nt\,dt=\frac{\pi}{4}$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2nt\,dt=\frac{\pi}{4}$
(2) $a_n=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{16}{\pi}\left(\dfrac{n}{4n^2-1}\right)^2$
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\pi}{4}$

【解答】

$$f_n(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos t+\sin 2nt)^2\,dt\quad(n\geqq 1)$$

(1) 半角の公式を用いて被積分関数を変形する．

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 nt\,dt&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2nt}{2}\,dt\\&=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2n}\sin 2nt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$ ……(答)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2nt\,dt&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4nt}{2}\,dt\\&=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{4n}\sin 4nt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

(2) 被積分関数は

$$(x\cos t+\sin 2nt)^2=x^2\cos^2 t+2x\cos t\sin 2nt+\sin^2 2nt$$

であり

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\sin 2nt\,dt&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\sin(2n+1)t+\sin(2n-1)t\}\,dt\\&=\left[-\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)t-\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\\&=\frac{4n}{4n^2-1}\end{aligned}$$

であるから，(1) の結果もあわせると

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{4n}{4n^2-1}x + \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4}\left(x + \frac{8}{\pi}\cdot\frac{n}{4n^2-1}\right)^2 - \frac{16}{\pi}\left(\frac{n}{4n^2-1}\right)^2 + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

とかける．よって，$f_n(x)$ の最小値 a_n は

$$\begin{aligned} a_n &= f_n\left(-\frac{8}{\pi}\cdot\frac{n}{4n^2-1}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{16}{\pi}\left(\frac{n}{4n^2-1}\right)^2} \end{aligned}$$

……(答)

である．

(3) (2) より

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{16}{\pi}\left(\frac{1}{4n-\frac{1}{n}}\right)^2\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

……(答)

である．