$x,\ y,\ z$ を座標とする空間において，xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

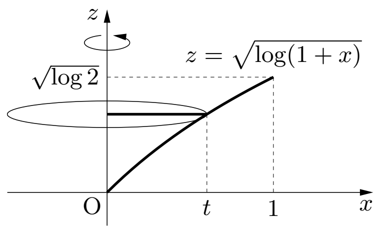
を z 軸のまわりに 1 回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする．この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする．このとき，V の体積を求めよ．

(20 京都大 理 6)

【答】 $2\pi\left(\dfrac{5}{3} - \log 2\right)$

【解答】

$z = \sqrt{\log(1+x)}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ は単調増加な関数であり，z $(0 \leqq z \leqq \sqrt{\log 2})$ に対し x はただ一つ決まる．



xz 平面内の曲線 $z = \sqrt{\log(1+x)}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる図形 S の方程式を求める．

曲線上の点 $\left(t,\ 0,\ \sqrt{\log(1+t)}\right)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ が描く図形は平面 $z = \sqrt{\log(1+t)}$ 上の円であり，この円の中心は $(0,\ 0,\ z)$ であり，半径は t $(0 \leqq t \leqq 1)$ である．切り口の円の方程式は

$$\begin{cases} z = \sqrt{\log(1+t)} & (\text{平面}) \\ x^2 + y^2 = t^2 & (\text{円柱面}) \end{cases} \iff \begin{cases} t = \sqrt{x^2+y^2} \quad (\because\ t \geqq 0) \\ z = \sqrt{\log(1+\sqrt{x^2+y^2})} \end{cases}$$

t の動く範囲は $0 \leqq t \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1 \iff x^2 + y^2 \leqq 1$$

であり，図形 S の方程式は

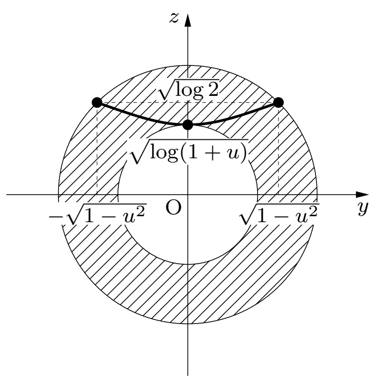
$$\begin{cases} z = \sqrt{\log(1+\sqrt{x^2+y^2})} \\ x^2 + y^2 \leqq 1 \end{cases}$$

である．

次に，図形 S の平面 $x = u$ $(-1 \leqq u \leqq 1)$ による切り口の方程式を求める．これは

$$\begin{cases} x = u & (\text{平面}) \\ z = \sqrt{\log(1+\sqrt{x^2+y^2})} & \\ x^2 + y^2 \leqq 1 & (\text{図形 } S) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = u \\ z = \sqrt{\log(1+\sqrt{u^2+y^2})} \\ -\sqrt{1-u^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-u^2} \end{cases}$$



であり，右図の太線部分となる．

立体 V の平面 $x = u$ $(-1 \leqq u \leqq 1)$ による切り口は，右図の斜線部分であり，この切り口の面積は

$$\begin{aligned}
&\pi\{(\sqrt{1-u^2})^2+(\sqrt{\log 2})^2\}-\pi\{\sqrt{\log(1+u)}\}^2 \\
&=\pi(1-u^2+\log 2)-\pi\log(1+u) \\
&=\pi\{1+\log 2-u^2-\log(1+u)\}
\end{aligned}$$

である．

図形 S が yz 平面に関して対称であることに注意すると，立体 V の体積は

$$\begin{aligned}
&2\pi\int_0^1\left\{1+\log 2-u^2-\log(1+u)\right\}du \\
&=2\pi\left\{\Big[(1+\log 2)u\Big]_0^1-\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1-\Big[(1+u)\log(1+u)-u\Big]_0^1\right\} \\
&=2\pi\left\{(1+\log 2)-\frac{1}{3}-(2\log 2-1)\right\} \\
&=\boldsymbol{2\pi\left(\frac{5}{3}-\log 2\right)} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}
\end{aligned}$$