$t$ を実数とし，不等式

$$(x^2-2x+y^2)(x^2-3x+y^2) \leqq 0, \quad t \leqq x \leqq t+1$$

の表す $xy$ 平面上の領域を $x$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする．

$t$ が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ．

(20 千葉大 4)

---

【答】 $\dfrac{8\sqrt{2}-1}{6}\pi$

---

【解答】

不等式

$$(x^2-2x+y^2)(x^2-3x+y^2) \leqq 0, \quad t \leqq x \leqq t+1 \qquad \cdots\cdots (*)$$

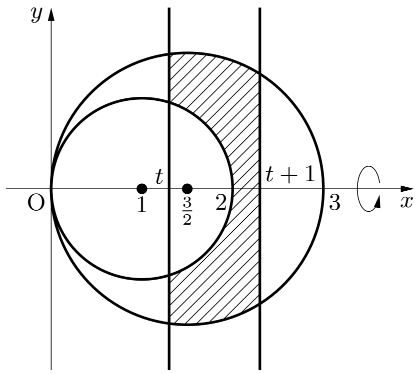
の表す $xy$ 平面上の領域を $D$ とおく．$D$ の境界となる曲線

$$x^2-2x+y^2=0,$$
$$x^2-3x+y^2=0$$

はそれぞれ円

$$(x-1)^2+y^2=1,$$
$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

である．$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ は不等式 $(*)$ の第 1 式を満たさないことを考慮すると領域 $D$ は右図の斜線部分となる．




$D$ を $x$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 $V(t)$ は

$$\begin{aligned}
V(t) &= \pi\int_t^{t+1}(3x-x^2)\,dx - \pi\int_t^2(2x-x^2)\,dx \\
&= \pi\left[3\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_t^{t+1} - \pi\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_t^2 \\
&= \pi\left\{\frac{3}{2}\{(t+1)^2-t^2\}-\frac{(t+1)^3-t^3}{3}\right\} - \pi\left\{(4-t^2)-\frac{8-t^3}{3}\right\} \\
&= \pi\left\{\frac{3}{2}(2t+1)-\frac{3t^2+3t+1}{3}\right\} - \pi\left(\frac{t^3}{3}-t^2+\frac{4}{3}\right) \\
&= \pi\left(-\frac{t^3}{3}+2t-\frac{1}{6}\right)
\end{aligned}$$

であり

$$V'(t)=\pi(-t^2+2)$$

$1 \leqq t \leqq 2$ における $V(t)$ の増減は下表となる．

| $t$ | 1 | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $V(t)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

よって，$V(t)$ は $t=\sqrt{2}$ のとき

最大値 $V(\sqrt{2})=\pi\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}-\dfrac{1}{6}\right)=\boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{2}-1}{6}\pi}$ ……(答)

をとる．