a と b は $0<a<b$ をみたす定数とする．座標平面上の点 $\mathrm{A}(0,\ -a)$ と直線 $\ell : y=a$ に対して，点 A からの距離と直線 ℓ からの距離の和が $2b$ である点の軌跡を C とする．

(1) 軌跡 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，$y \geqq a$ のとき，y を定数 $a,\ b$ を含む x の式で表せ．

(2) 軌跡 C の概形を図示せよ．

(3) 軌跡 C で囲まれる部分を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を a と b を用いて表せ．

(20 札幌医大 3)

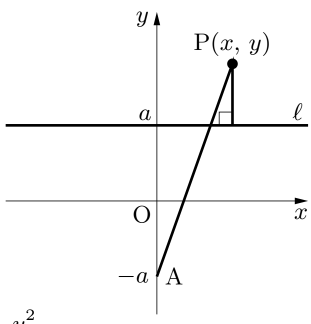
【答】

(1) $y=-\dfrac{1}{4(a+b)}x^2+b\ (y \geqq a)$

(2) 略

(3) $4\pi b(b-a)(b+a)$

【解答】



(1) C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は点 $\mathrm{A}(0,\ -a)$ からの距離と直線 $\ell : y=a$ からの距離の和が $2b$ であるから

$$\sqrt{x^2+(y+a)^2}+|y-a|=2b \qquad \cdots\cdots (*)$$

を満たす．$y \geqq a$ のとき

$$(*) \iff \sqrt{x^2+(y+a)^2}=2b+a-y$$

$$\iff \begin{cases} x^2+(y+a)^2=(2b+a-y)^2 \\ 2b+a-y \geqq 0 \end{cases}$$

第 1 式を整理すると

$$x^2+y^2+2ay+a^2=(2b+a)^2-2(2b+a)y+y^2$$

$$x^2=4b^2+4ab-4(a+b)y$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{4(a+b)}x^2+b$$

このとき $y \leqq b$ であり，$0<a<b$ もあわせると第 2 式はつねに成り立つ．

よって，$y \geqq a$ のとき

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{4(a+b)}x^2+b} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $y \leqq a$ のとき

$$(*) \iff \sqrt{x^2+(y+a)^2}=2b-a+y$$

$$\iff \begin{cases} x^2+(y+a)^2=(2b-a+y)^2 \\ 2b-a+y \geqq 0 \end{cases}$$

第 1 式を整理すると

$$x^2+y^2+2ay+a^2=(2b-a)^2+2(2b-a)y+y^2$$

$$x^2=4b^2-4ab+4(b-a)y$$

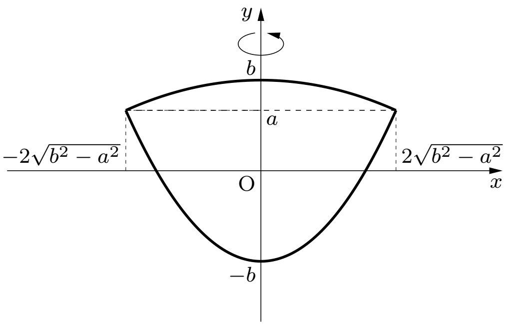
$$\therefore\quad y=\frac{1}{4(b-a)}x^2-b$$

このとき $y \geqq -b$ であり，$0<a<b$ もあわせると第 2 式はつねに成り立つ．

よって，(1) もあわせると軌跡 C の方程式は

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{4(b+a)}x^2 + b & (y \geqq a) \\ y = \dfrac{1}{4(b-a)}x^2 - b & (y \leqq a) \end{cases}$$

であり，概形は右図の実線部分となる．



(3) 求める体積 V は，(2) の図より

$$V = \int_{-b}^{a} \pi x^2\,dy + \int_{a}^{b} \pi x^2\,dy$$

である．

$$\begin{cases} x^2 = -4(b+a)(y-b) & (y \geqq a) \\ x^2 = 4(b-a)(y+b) & (y \leqq a) \end{cases}$$

に注意すると

$$\begin{aligned} V &= 4\pi(b-a)\int_{-b}^{a}(y+b)\,dy - 4\pi(b+a)\int_{a}^{b}(y-b)\,dy \\ &= 4\pi(b-a)\left[\frac{(y+b)^2}{2}\right]_{-b}^{a} - 4\pi(b+a)\left[\frac{(y-b)^2}{2}\right]_{a}^{b} \\ &= 2\pi(b-a)(a+b)^2 + 2\pi(b+a)(a-b)^2 \\ &= 2\pi(b-a)(b+a)\{(b+a)+(b-a)\} \\ &= \boldsymbol{4\pi b(b-a)(b+a)} \qquad \cdots\cdots\text{(答)} \end{aligned}$$

である．