座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える．この円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする円錐 (内部を含む) を S とする．また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ を考える．

(1) 点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする．平面 $z=1$ による S の切り口および，平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ．

(2) 点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ．

(20 東京大 理 5)

【答】

(1) 略

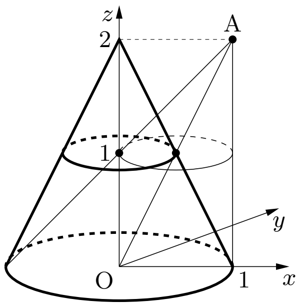
(2) $\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{2}{3}$

【解答】

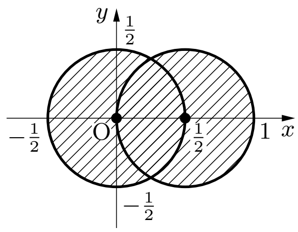
(1) 点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする円錐 S の底面は，点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の xy 平面上の円である．この円を C_0 とおく．

平面 $z=1$ による S の切り口は，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周および内部である．

線分 AO と平面 $z=1$ の交点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$ であり，点 P が底面 C_0 を動くときの線分 AP が通過する部分 T の平面 $z=1$ による切り口は，点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周および内部である．



平面 $z=1$ による $S,\ T$ の切り口を同一平面 $(z=1)$ 上に図示すると，右下図の斜線部分となる．境界も含む．



- 円錐 S は

$$x^2+y^2 \leqq \left(\frac{2-z}{2}\right)^2,\ 0 \leqq z \leqq 2$$

と表すことができる．

平面 $z=1$ による S の切り口は

$$x^2+y^2 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ z=1 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

と表すことができる．また，平面 $z=1$ による T の切り口の点 Q の座標を $(x,\ y,\ 1)$ とおくと，S の底面 C_0 の周および内部を動く点 $\mathrm{P}(X,\ Y,\ 0)$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

であり，$x,\ y$ で表すと

$$\begin{aligned}(X,\ Y,\ 0)&=(1,\ 0,\ 2)+2(x-1,\ y,\ -1)\\&=(2x-1,\ 2y,\ 0)\end{aligned}$$

である．$\mathrm{P}(X,\ Y,\ 0)$ は $X^2+Y^2 \leqq 1$ を満たすから，T の切り口は

$$(2x-1)^2+(2y)^2 \leqq 1,\ z=1$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ z=1 \qquad \cdots\cdots ㋑$$

と表すことができる．2 つの切り口 ㋐, ㋑ を同一平面 $(z=1)$ 上に図示すると，解答の図となる．

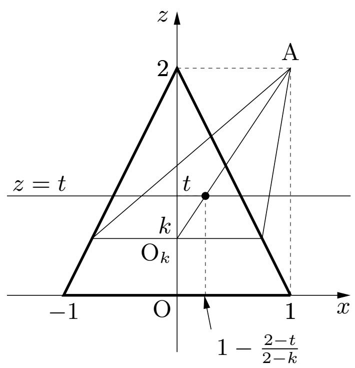
(2) 点Pが円錐 S (内部を含む) を動くとき，線分APが通過する部分を D とおき，その体積を V とおく．

点Pが円錐 S と平面 $z=k$ $(0 \leqq k \leqq 2)$ の共通部分 C_k の周および内部を動くときを考える．$0 \leqq k < 2$ のとき，C_k は点 $\mathrm{O}_k(0,\ 0,\ k)$ を中心とする半径 $\dfrac{2-k}{2}$ の円の周および内部であり，$k=2$ のとき，C_k は頂点 $(0,\ 0,\ 2)$ とAを結ぶ線分 (両端も含む) である．

$0 \leqq k < 2$ のときを考える．

点Pが円 C_k の周および内部を動くとき，線分APが通過する部分の平面 $z=t$ $(k \leqq t < 2)$ による切り口を $C_{k,\ t}$ とおく．線分 AO_k と平面 $z=t$ の交点は線分 AO_k を $(2-t):(t-k)$ に内分する点であり

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2-t}{(2-t)+(t-k)}\overrightarrow{\mathrm{AO}_k}\\&= (1,\ 0,\ 2) + \frac{2-t}{2-k}(-1,\ 0,\ k-2)\end{aligned}$$



であるから，この座標は $\left(1-\dfrac{2-t}{2-k},\ 0,\ t\right)$ である．すなわち，$C_{k,\ t}$ は点 $\left(1-\dfrac{2-t}{2-k},\ 0,\ t\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{2-t}{2-k}\cdot\dfrac{2-k}{2}=\dfrac{2-t}{2}$ の円の周および内部である．

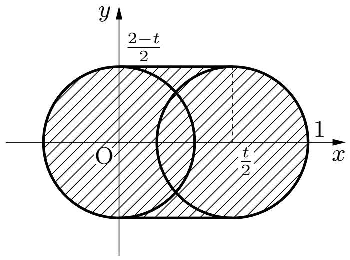
t を固定して，k を $0 \leqq k \leqq t$ の範囲を動かすとき，円 $C_{k,\ t}$ の

$$\text{半径は一定値 } \frac{2-t}{2}$$

であり，$1-\dfrac{2-t}{2-k}$ は k について減少関数であるから

$$\text{中心の } x \text{ 座標は } \frac{t}{2} \text{ から } 0 \text{ まで減少}$$

する．したがって，D の平面 $z=t$ $(k \leqq t < 2)$ による切り口 D_t は，k が $0 \leqq k \leqq t$ の範囲を動くときの円 $C_{k,\ t}$ が通過する領域であり，右の図の斜線部分のようになる．境界も含む．



D_t の面積を $f(t)$ とおくと

$$\begin{aligned}f(t) &= \pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{2-t}{2}\right)\cdot\frac{t}{2}\\&= \frac{\pi}{4}(t-2)^2 - \frac{1}{2}t(t-2)\end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned}V &= \int_0^2 f(t)\,dt\\&= \frac{\pi}{4}\int_0^2 (t-2)^2\,dt - \frac{1}{2}\int_0^2 t(t-2)\,dt\\&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}(t-2)^3\right]_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{(2-0)^3}{6}\\&= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}}\end{aligned}$$

……(答)

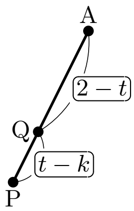
である．

- 円錐 S の平面 $z=k$ 上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y,\ Z)$ は

$$X^2+Y^2 \leqq \left(\frac{2-k}{2}\right)^2,\ Z=k \qquad \cdots\cdots ㋒$$

を満たす．線分 AP と平面 $z = t$ $(k \leqq t \leqq 2)$ との共有点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ t)$ とおく．$\mathrm{P}(X,\ Y,\ k)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ の z 座標に注意すると，点 Q は線分 AP を $(2-t):(t-k)$ に内分するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{(2-t)+(t-k)}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \\ &= (1,\ 0,\ 2) + \frac{2-k}{2-t}(x-1,\ y,\ t-2) \\ &= \left(1 + \frac{2-k}{2-t}(x-1),\ \frac{2-k}{2-t}y,\ 2 + \frac{2-k}{2-t}(t-2)\right) \\ &= \left(\frac{2-k}{2-t}\left(x - \frac{t-k}{2-k}\right),\ \frac{2-k}{2-t}y,\ k\right)\end{aligned}$$



である．X, Y は㋒を満たすから

$$\left\{\frac{2-k}{2-t}\left(x - \frac{t-k}{2-k}\right)\right\}^2 + \left(\frac{2-k}{2-t}y\right)^2 \leqq \left(\frac{2-k}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{t-k}{2-k}\right)^2 + y^2 \leqq \left(\frac{2-t}{2}\right)^2$$

したがって，線分 AP が通過する部分の平面 $z = t$ $(k \leqq t < 2)$ による切り口 $C_{k,t}$ を表す式は

$$\left(x - \frac{t-k}{2-k}\right)^2 + y^2 \leqq \left(\frac{2-t}{2}\right)^2,\ z = t$$

である．以下，解答と同じである．