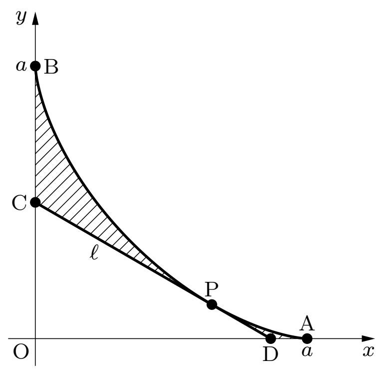
$xy$ 平面上において，媒介変数 $\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ によって $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ と表される右図の曲線 AB について考える．ただし，$a$ は正の定数とする．以下の問いに答えよ．




(1) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のときの曲線上の点を P とする．点 P における接線 $\ell$ の方程式を求めよ．

(2) 接線 $\ell$ が $y$ 軸と交わる点 C，$x$ 軸と交わる点 D の座標をそれぞれ求めよ．

(3) 図の斜線部分 ABCD の周囲全長を求めよ．

(4) 図の斜線部分 ABCD を $x$ 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(20 豊橋技科大 3)

---

【答】

(1) $\ell : y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{a}{2}$

(2) $\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{a}{2}\right)$，$\mathrm{D}\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2},\ 0\right)$

(3) $\left(4 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a$

(4) $\left(\dfrac{16}{105} - \dfrac{\sqrt{3}}{24}\right)\pi a^3$

---

【解答】

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のときの曲線上の点 P の座標は

$$\left(a\cos^3\frac{\pi}{6},\ a\sin^3\frac{\pi}{6}\right) \text{ すなわち } \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}a,\ \frac{a}{8}\right)$$

である．$x$, $y$を$\theta$ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta,$$
$$\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$$

であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta$$

である．よって，点 P における接線 $\ell$ の方程式は

$$y = -\tan\frac{\pi}{6}\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{8}a\right) + \frac{a}{8}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\ell : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{a}{2}} \quad \cdots\cdots ①$$ ……(答)

である．

(2) ① で $x=0$ とおくことにより　　$\mathbf{C}\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\right)$, ……(答)

① で $y=0$ とおくことにより　　$\mathbf{D}\left(\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right)$ ……(答)

を得る．

(3) 曲線 AB の長さは

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2\theta\sin\theta)^2+(3a\sin^2\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin\theta\cos\theta\,d\theta\quad(\because\ a>0)$$
$$=\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=\frac{3a}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}a$$

である．さらに

線分 CD の長さは　$\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=a\quad(\because\ a>0)$,

線分 BC の長さは　$a-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$,

線分 AD の長さは　$a-\dfrac{\sqrt{3}a}{2}=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a$

であるから，求める長さは

$$\frac{3}{2}a+a+\frac{a}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a=\left(\mathbf{4}-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{a}$$ ……(答)

である．

(4) 求める体積は

$$\int_0^a\pi y^2\,dx-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}a}{2}=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y^2\frac{dx}{d\theta}\,d\theta-\frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3$$

である．ここで

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y^2\frac{dx}{d\theta}\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(a\sin^3\theta)^2(-3a\sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta$$
$$=3a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=3a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)^3\cos^2\theta\cdot(-\cos\theta)'\,d\theta$$
$$=3a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^6\theta-3\cos^4\theta+3\cos^2\theta-1)\cos^2\theta(\cos\theta)'\,d\theta$$
$$=3a^3\left[\frac{\cos^9\theta}{9}-\frac{3}{7}\cos^7\theta+\frac{3}{5}\cos^5\theta-\frac{1}{3}\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=3a^3\left(-\frac{1}{9}+\frac{3}{7}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)$$
$$=3a^3\,\frac{-35+135-189+105}{9\cdot 7\cdot 5}$$
$$=\frac{16}{105}a^3$$

であるから，求める体積は

$$\pi\cdot\frac{16}{105}a^3-\frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3=\left(\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{105}}-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{24}}\right)\boldsymbol{\pi a^3}$$ ……(答)

である．