A と B の二人が，A を先手として以下のルールで交互に石を取り合うゲームを行う．

ルール

- はじめに $n$ 個の石がある．
- まず先手は $(n-1)$ 個以下の好きな数の石を取る．
- 以降は，直前に相手が取った石の数の 2 倍以下の好きな数の石を取ることを繰り返す．
- 最後の石を取ったほうが勝ちとなる．

相手の石の取り方によらず勝てるような石の取り方があるとき「必勝法がある」という．

例えば $n=4$ のとき，まず A が 1 個取れば，次に B は 1 個か 2 個取ることができる．もし B が 1 個取ったなら，A は次に 2 個取ることで勝てる．もし B が 2 個取ったなら，A は次に 1 個取ることで勝てる．このように，B の石の取り方によらず A は勝てるので，A に必勝法がある．

(1) $n=5$ のとき，A または B のどちらに必勝法があるか答えよ．

(2) $n=10$ のとき，A または B のどちらに必勝法があるか答えよ．

(20 一橋大 後 経済 4)

---

【答】

(1) B に必勝法がある．

(2) A に必勝法がある．

---

【解答】

$n=4$ のとき，問題文にある A の必勝法は次のように表すことができる．

| 1 回目 | 2 回目 | 3 回目 | |
|---|---|---|---|
| A → | B → | AA | (A の勝ち) |
| | BB → | A | (A の勝ち) |

$n=4$ のとき，後手 B の石の取り方にかかわらず先手 A は勝てるので，先手 A に必勝法がある．

(1) $n=5$ のとき，1 回目に A は 4 個以下の石を取ることができる．

(ア) 1 回目に A が 1 個の石を取るとき：
石は 4 個残っており，2 回目を起点としたときの先手 B に必勝法がある．

(イ) 1 回目に A が $k$ $(k=2,\ 3,\ 4)$ 個の石を取るとき：
石は $5-k$ 個残っており，$5-k<2k$ $(k=2,\ 3,\ 4)$ を満たすから，B は残りの $5-k$ 個すべてを取ることができ，2 回目に B は勝つことができる．

| 1 回目 | 2 回目 | |
|---|---|---|
| AA → | BBB | (B の勝ち) |
| AAA → | BB | (B の勝ち) |
| AAAA → | B | (B の勝ち) |

(ア)，(イ) より，$n=5$ のとき，先手 A の石の取り方にかかわらず後手 B は勝つことができるので，後手 **B に必勝法がある．** ……(答)

(2) $n = 10$ のとき，1 回目に A は 9 個以下の石を取ることができる．

1 回目に A が $k$ ($k \leqq 9$) 個の石を取るとしたとき，(1) の (イ) と同じく考えると

$$10 - k < 2k \qquad \therefore \quad k > \frac{10}{3}$$

すなわち，$k = 4,\ 5,\ \cdots,\ 9$ のとき，B は残りの $10 - k$ 個すべてを取ることができ，2 回目に B は勝つことができる．

$k = 1,\ 2,\ 3$ で A に必勝法があるかないかを

石が 4 個残っているときは，そこを起点とした先手に必勝法があり，
石が 5 個残っているときは，そこを起点とした後手に必勝法がある

ことに注意しながら調べる．

(ア) 1 回目に A が 3 個の石を取るとき：

2 回目に B が 2 個の石を取ると，石は 5 個残っており，3 回目を起点としたときの後手 B に必勝法がある．

(イ) 1 回目に A が 2 個の石を取るとき：

2 回目に B は 1 個，2 個，3 個，4 個の石を取ることができる．

| 1 回目 | | 2 回目 | | 3 回目 | |
|---|---|---|---|---|---|
| AA | → | B | → | AA | この後は A の必勝法あり |
| | → | BB | → | A | この後は A の必勝法あり |
| | → | BBB | → | AAAAA | (A の勝ち) |
| | → | BBBB | → | AAAA | (A の勝ち) |

2 回目に B が何個の石を取っても，A は勝つことができるから，**A に必勝法がある．**

……(答)

- (イ) で A の必勝法がみつかったので,【解答】では，$k = 1$ のときの吟味を止めた．吟味を続けてみよう．

  1 回目に A が 1 個の石を取るとき：
  2 回目に B は 1 個または 2 個の石を取ることができる．

| 1 回目 | | 2 回目 | | 3 回目 | | 4 回目 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | → | B | → | A | → | BB | この後は B の必勝法あり |
| | | | → | AA | → | B | この後は B の必勝法あり |

  2 回目に B が 1 個の石を取ると，3 回目に A は 1 個または 2 個の石を取ることができ，どちらのときも A は勝つことができない．

  したがって，$k = 1$ のときは B に必勝法がある．