さいころを 3 回投げ，出た目の数を順に a, b, c とする．a, b, c を辺の長さとする以下のような三角形ができる目の出方が何通りあるかを考える．

1) $a=b=c$ の正三角形になるのは 6 通りある．

2) $a=b>c$ の二等辺三角形になるのは $\boxed{\text{オ}}$ 通りある．

3) $a>b=c$ の二等辺三角形になるのは $\boxed{\text{カ}}$ 通りある．

4) $a>b>c$ の三角形になるのは $\boxed{\text{キ}}$ 通りある．

5) 正三角形または二等辺三角形になるのは $\boxed{\text{ク}}$ 通りある．

6) 直角三角形になるのは $\boxed{\text{ケ}}$ 通りある．

三角形ができない目の出方は $\boxed{\text{コ}}$ 通りある．

(20 同志社大 文・経済 1(2))

【答】

オ	カ	キ	ク	ケ	コ
15	6	7	69	6	105

【解答】

3 辺の長さが x, y, z となる三角形が存在するための条件は

$$\begin{cases} x<y+z \\ y<z+x \\ z<x+y \end{cases}$$

であり，x が最大のときは

$$x<y+z$$

である．

2) $a=b>c$ のとき $a=b<b+c$ であり，この条件を満たすならば三角形はつねに存在する．

さいころの目を 2 種類選び，大きい方を a, b，小さい方を c とするばよいから

$$_6\mathrm{C}_2=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=\mathbf{15}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- c $(1\leqq c\leqq 5)$ に対して a $(=b)$ は，$6-c$ (通り) あるから

$$5+4+3+2+1=15\ (\text{通り})$$

3) $a>b=c$ を満たす三角形が存在する条件は

$$\begin{cases} a>b=c \\ a<b+c \end{cases} \iff \begin{cases} b=c \\ b<a<2b \end{cases}$$

$b=c=1$ のとき　a は存在しない
$b=c=2$ のとき　$a=3$ の 1 通り
$b=c=3$ のとき　$a=4,\ 5$ の 2 通り
$b=c=4$ のとき　$a=5,\ 6$ の 2 通り
$b=c=5$ のとき　$a=6$ の 1 通り

であり，求める目の出方は　**6** 通り．　……(答)

4)　$a>b>c$ を満たす三角形が存在する条件は

$$\begin{cases} a>b>c & \cdots\cdots ① \\ a<b+c & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① かつ $c \geqq 1$ より，$b \geqq 2$ であり $a \geqq 3$ である．

$a=3$ のとき，① より $(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 1)$ であるが，これは ② に反する．

$a=4$ のとき，$(a,\ b,\ c)=(4,\ 3,\ 2)$

$a=5$ のとき，$(a,\ b,\ c)=(5,\ 4,\ 3),\ (5,\ 4,\ 2)$

$a=6$ のとき，$(a,\ b,\ c)=(6,\ 5,\ 4),\ (6,\ 5,\ 3),\ (6,\ 5,\ 2),\ (6,\ 4,\ 3)$

であり，求める目の出方は　**7** 通り．　……(答)

5)　正三角形は 1) より，6 通り．

正三角形でない二等辺三角形は

$$\text{i)}\quad a=b>c,\ b=c>a,\ c=a>b,$$

$$\text{ii)}\quad a>b=c,\ b>c=a,\ c>a=b$$

のいずれかである．i)，ii) はそれぞれ 2)，3) の $a,\ b,\ c$ を並べかえたものであるから

$$15\times 3+6\times 3=63\ (\text{通り})$$

以上より，正三角形または二等辺三角形になるのは，

$$6+63=\mathbf{69}\ (\text{通り})$$　……(答)

6)　直角三角形になるのは $\{a,\ b,\ c\}=\{3,\ 4,\ 5\}$ のときであり，出る目の順序も考えると

$$3!=\mathbf{6}\ (\text{通り})$$　……(答)

三角形ができる目の出方を数える．

正三角形でも二等辺三角形でもない三角形になるのは，4) の $a,\ b,\ c$ を並べかえたものであるから

$$7\cdot 3!=42\ (\text{通り})$$

正三角形または二等辺三角形になるのは 5) で数えてあるから，あわせると

$$42+69=111\ (\text{通り})$$

よって，三角形ができない目の出方は

$$6^3-111=216-111=\mathbf{105}\ (\text{通り})$$　……(答)