

次の場合について、4個の玉を6つの箱に入れる方法は何通りあるか。

- (a) 玉も箱も、それぞれ互いに区別できる。
- (b) 玉も箱も、それぞれ互いに区別できない。
- (c) 玉は互いに区別できるが、箱は互いに区別できない。
- (d) 玉は互いに区別できないが、箱は互いに区別できる。
- (e) 上記 (d) において、さらに、1つの箱に1つの玉しか入らない場合。

(20 兵庫医科大 1(3))

【答】

- (a) 1296 通り
- (b) 5 通り
- (c) 15 通り
- (d) 126 通り
- (e) 15 通り

【解答】

- (a) 区別のつく4個の玉を、区別のつく6つの箱に入れる方法は、各玉の入れ方がそれぞれ6通りずつあるので

$$6^4 = \mathbf{1296} \text{ (通り)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- (b) 区別のつかない4個の玉を、区別のつかない6つの箱に入れる方法は、4つの玉を何個の箱に入れるかで場合分けすると

- 1つの箱に入れるのは $\{4, 0, 0, 0, 0, 0\}$ の1通り
- 2つの箱に入れるのは $\{1, 3, 0, 0, 0, 0\}$, $\{2, 2, 0, 0, 0, 0\}$ の2通り
- 3つの箱に入れるのは $\{1, 1, 2, 0, 0, 0\}$ の1通り
- 4つの箱に入れるのは $\{1, 1, 1, 1, 0, 0\}$ の1通り

あるから

$$1 + 2 + 1 + 1 = \mathbf{5} \text{ (通り)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- (c) 区別のつく4個の玉を、区別のつかない6つの箱に入れる方法は、(b)の場合分けに従うと

- 1つの箱に $\{4, 0, 0, 0, 0, 0\}$ として入れるのは 1通り
- 2つの箱に $\{1, 3, 0, 0, 0, 0\}$, $\{2, 2, 0, 0, 0, 0\}$ として入れるのは

$${}_4C_1 + \frac{{}_4C_2}{2!} = 4 + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} = 7 \text{ 通り}$$

- 3つの箱に $\{1, 1, 2, 0, 0, 0\}$ として入れるのは ${}_4C_2 = 6$ 通り
- 4つの箱に $\{1, 1, 1, 1, 0, 0\}$ として入れるのは 1通り

あるから

$$1 + 7 + 6 + 1 = \mathbf{15} \text{ (通り)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- 区別のつく 4 個の玉を 2 個 2 個の組に分ける場合の数を,【解答】では $\frac{4C_2}{2!} = 3$ とした数えたが, 4 個の玉の 1 つに着目して, これが他のどの玉と組むかと考え

$${}_3C_1 = 3 \text{ (通り)}$$

として数えてもよい.

- (d) 区別のつかない 4 個の玉を, 区別のつく 6 つの箱に入れる方法は, 箱 A, B, C, D, E, F に入る玉の個数をそれぞれ a, b, c, d, e, f とすると

$$a + b + c + d + e + f = 4 \quad (a, b, c, d, e, f \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

を満たす整数の組 (a, b, c, d, e, f) に対応し, これは 4 個の玉 \circ と 5 本の仕切り棒 $|$ の並べ方に対応する. たとえば

$$||\circ\circ|\circ||\circ \longleftrightarrow (a, b, c, d, e, f) = (0, 0, 2, 1, 0, 1)$$

$$\circ|\circ|\circ||\circ \longleftrightarrow (a, b, c, d, e, f) = (1, 1, 1, 0, 0, 1)$$

といった具合である. したがって, 求める総数は

$$\frac{(4+5)!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \text{ (通り)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

- 6 個の箱から重複を許して 4 個の玉を取るときの取り方の総数 (重複組合せ) であり

$${}_6H_4 = {}_{6+4-1}C_4 = {}_9C_4 = 126$$

としてもよい.

- (e) 区別のつかない 4 個の玉を, 区別のつく 6 つの箱に 0 個または 1 個入れる方法は, 玉を入れる箱を 4 個選べばよいから

$${}_6C_4 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ (通り)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.