7 個の玉 a, b, c, d, e, f, g と 3 個の箱 A，B，C があり，7 個の玉を 3 個の箱に入れる．どの玉もいずれかの箱に入れるものとする．また，ひとつも玉の入らない箱があってもよいものとする．ただし，A，B，C の箱にはそれぞれ最大で 2 個，4 個，6 個の玉しか入れることができない．このとき，次の問に答えなさい．

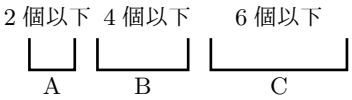
(1) 箱 A の中に 2 個の玉が入る入れ方は何通りあるか．
(2) 玉の入れ方は全部で何通りあるか．
(3) 玉 a と玉 b が同じ箱に入る入れ方は何通りあるか．

(20 埼玉大 教育・経済 2)

【答】
(1) 651 通り
(2) 1148 通り
(3) 362 通り

【解答】

(1) A に入る 2 個の玉の選び方は ${}_7\mathrm{C}_2$ 通りある．残りの 5 個の玉は，B か C かのいずれかに入るが，5 個すべてを B に入れることはできない．条件を満たす入れ方は



$$ {}_7\mathrm{C}_2 \cdot (2^5 - 1) = 21 \cdot (32 - 1) = \mathbf{651}\ (\text{通り}) $$

……(答)

- B，C に入る玉の個数の組は (0, 5)，(1, 4)，(2, 3)，(3, 2)，(4, 1) の 5 通りがある ((5, 0) は条件を満たさない) から

$$ \begin{aligned} &{}_7\mathrm{C}_2 \cdot ({}_5\mathrm{C}_0 + {}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4) \\ &= 21 \cdot (1 + 5 + 10 + 10 + 5) \\ &= 21 \cdot 31 \end{aligned} $$

でもよいが，${}_5\mathrm{C}_0 + {}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4$ は二項定理を用いると

$$ {}_5\mathrm{C}_0 + {}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4 = (1+1)^5 - {}_5\mathrm{C}_5 = 2^5 - 1 = 31 $$

(2) A に入る玉の個数は最大で 2 個である．

(i) A に入る玉の個数が 0 のとき：
7 個の玉は，B か C かのいずれかに入るが，B に 5 個以上の玉を入れることと，C に 7 個の玉を入れることはできないから，B，C に入る玉の個数の組は (1, 6)，(2, 5)，(3, 4)，(4, 3) の 4 通りがある．

$$ {}_7\mathrm{C}_1 + {}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_3 + {}_7\mathrm{C}_4 = 7 + 21 + 35 + 35 = 98\ (\text{通り}) $$

(ii) A に入る玉の個数が 1 のとき：
A に入る玉の選び方が ${}_7\mathrm{C}_1$ 通りで，残りの 6 個の玉は，B か C かのいずれかに入るが，5 個以上の玉を B に入れることはできない．条件を満たす入れ方は

$$ {}_7\mathrm{C}_1 \cdot (2^6 - {}_6\mathrm{C}_5 - {}_6\mathrm{C}_6) = 7 \cdot (64 - 6 - 1) = 7 \cdot 57 = 399\ (\text{通り}) $$

- B，C に入る玉の個数の組は (0, 6)，(1, 5)，(2, 4)，(3, 3)，(4, 2) の 5 通りがあるから

$$ {}_7\mathrm{C}_1 \cdot ({}_6\mathrm{C}_0 + {}_6\mathrm{C}_1 + {}_6\mathrm{C}_2 + {}_6\mathrm{C}_3 + {}_6\mathrm{C}_4) = 7 \cdot (1 + 6 + 15 + 20 + 15) = 7 \cdot 57 = 399 $$

としてもよい．

(iii) A に入る玉の個数が 2 のとき：
(1) で計算済みであり，651 通り

以上 (i)〜(iii) により，求める入れ方は

$$98 + 399 + 651 = \mathbf{1148} \text{ (通り)}$$ ……(答)

(3) a と b がどの箱に入るかで場合分けする．

(i) a と b が A に入るとき：
残り 5 個の玉の入れ方は，(1) より　31 (通り)

(ii) a と b が B に入るとき：
a と b 以外で B に入る玉は 0 個，1 個，2 個のいずれかとなる．

(ア) A に入る玉の個数が 0 個のとき，残り 5 個の玉の B，C に入る玉の組は (0, 5)，(1, 4)，(2, 3) の 3 通りがあるから

$${}_5\mathrm{C}_0 + {}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 = 1 + 5 + 10 = 16 \text{ (通り)}$$

(イ) A に入る玉の個数が 1 個のとき，その玉の選び方 ${}_5\mathrm{C}_1$ 通りで，残り 4 個の玉の B，C に入る玉の組は (0, 4)，(1, 3)，(2, 2) の 3 通りがあるから

$${}_5\mathrm{C}_1 \cdot ({}_4\mathrm{C}_0 + {}_4\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_2) = 5 \cdot (1 + 4 + 6) = 55 \text{ (通り)}$$

(ウ) A に入る玉の個数が 2 個のとき，その玉の選び方は ${}_5\mathrm{C}_2$ 通りで，残り 3 個の玉の B，C に入る玉の組は (0, 3)，(1, 2)，(2, 1) の 3 通りがあるから

$${}_5\mathrm{C}_2 \cdot ({}_3\mathrm{C}_0 + {}_3\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_2) = 10 \cdot (1 + 3 + 3) = 70 \text{ (通り)}$$

よって，(ii) の総数は

$$16 + 55 + 70 = 141 \text{ (通り)}$$

(iii) a と b が C に入るとき：
a と b 以外で C に入る玉は 0 個，1 個，2 個，3 個，4 個のいずれかとなる．

(ア) A に入る玉の個数が 0 個のとき，残りの 5 個の玉の入れ方 2^5 通りのうち，5 個全部が B または C に入ることはないので

$$2^5 - 2 = 30 \text{ (通り)}$$

(イ) A に入る玉の個数が 1 個のとき，その玉の選び方は ${}_5\mathrm{C}_1$ 通りで，残りの 4 個の玉の B と C への入れ方が 2^4 通りなので

$${}_5\mathrm{C}_1 \cdot 2^4 = 5 \cdot 16 = 80 \text{ (通り)}$$

(ウ) A に入る玉の個数が 2 個のとき，その玉の選び方は ${}_5\mathrm{C}_2$ 通りで，残りの 3 個の玉の B と C への入れ方が 2^3 通りとなので

$${}_5\mathrm{C}_2 \cdot 2^3 = 10 \cdot 8 = 80 \text{ (通り)}$$

よって，(iii) の総数は

$$30 + 80 + 80 = 190 \text{ (通り)}$$

以上 (i)〜(iii) により，求める入れ方は

$$31 + 141 + 190 = \mathbf{362} \text{ (通り)}$$ ……(答)