7 個の数字 1，2，3，4，5，6，7 のうちの異なる 3 個を並べて，3 桁の整数を作る．

(1) 作ることができる 3 桁の整数のうち，5 の倍数は $\boxed{\text{アイ}}$ 個ある．

(2) 作ることができる 3 桁の整数のうち，9 の倍数は $\boxed{\text{ウエ}}$ 個ある．

(3) 作ることができる 3 桁の整数のうち，2 でも 3 でも割り切れない数は $\boxed{\text{オカ}}$ 個ある．

(4) 作ることができる 3 桁の整数のうち，17 で割ると 4 余り，14 で割ると 13 余る数は $\boxed{\text{キクケ}}$ である

(5) 作ることができる 3 桁の整数を小さい順に並べるとき，109 番目の数は $\boxed{\text{コサシ}}$ である

(20 東洋大 文系 3)

【答】

アイ	ウエ	オカ	キクケ	コサシ
30	24	76	531	456

【解答】

(1) 作ることができる 3 桁の 5 の倍数は，一の位の数字が 5 で，百，十の位に他の 2 数を並べたものであるから

$${}_6\mathrm{P}_2 = 6 \cdot 5 = \mathbf{30}\text{ 個} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 作ることができる 3 桁の 9 の倍数は，各桁の数字の和が 9 の倍数となるもので，その組合せは

$$\{1,\ 2,\ 6\},\ \{1,\ 3,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\ \{5,\ 6,\ 7\}$$

の 4 通りである．各組は 3! 通りの並べ方があるから

$$4 \times 3! = \mathbf{24}\text{ 個} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) 作ることができる 3 桁の整数

$${}_7\mathrm{P}_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210\text{ 個}$$

から 2 または 3 で割り切れるものを除く．

作ることができる 3 桁の 2 で割り切れる整数は，一の位の数字が 2，4，6 のいずれかで，百，十の位に一の位で用いた数字以外の 2 つの数字を並べたものであるから

$$3 \times {}_6\mathrm{P}_2 = 3 \times 6 \cdot 5 = 90\text{ 個}$$

作ることができる 3 桁の 3 で割り切れる整数は，各桁の数字の和が 3 の倍数になるもので，1〜7 を 3 で割った余りで分類してできる 3 つの集合を

$$A = \{1,\ 4,\ 7\}, \quad B = \{2,\ 5\}, \quad C = \{3,\ 6\}$$

とおくと，A から 3 個，または A，B，C から 1 個ずつ選んだ 3 個が並んでできる整数であるから

$$3! + (3 \cdot 2 \cdot 2) \times 3! = 6 + 72 = 78\text{ 個}$$

また，作ることができる 3 桁の 6 で割り切れる整数は，3 の倍数で，かつ一の位が 2，4，6 のいずれかが並んだものである．

一の位が 4 の数は　$2+2\cdot 2\times 2!=10$ 個，
一の位が 2 の数は　$3\cdot 2\times 2!=12$ 個
一の位が 6 の数は　$3\cdot 2\times 2!=12$ 個

であり，34 個である．
したがって，2 または 3 の倍数は

$$90+78-34=134 \text{ 個}$$

よって，作ることができる 3 桁の 2 でも 3 でも割り切れない整数は

$${}_7\mathrm{P}_3-134=210-134=\mathbf{76} \text{ 個} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(4) 作ることができる 3 桁の整数は 123 から 765 までの整数の中の 0，8，9 を使わない数である．求める整数を N とおくと，N は整数 m，n を使って

$$N=17m+4=14n+13$$

と表される．したがって，m，n は

$$17m-14n=9 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす．これを満たす $(m,\ n)$ の 1 つが $(3,\ 3)$ なので

$$17\cdot\ 3-14\cdot 3=9 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② の辺々をひいて

$$17(m-3)-14(n-3)=0$$
$$\therefore\quad 17(m-3)=14(n-3)$$

17 と 14 は互いに素なので，整数 k を用いて

$$\begin{cases} m-3=14k \\ n-3=17k \end{cases}$$

と表される．$m=14k+3$ より

$$N=17(14k+3)+4=238k+55$$

$123\leqq N\leqq 765$ なので $k=1,\ 2$ を代入して

$$N=293,\ 531$$

となる．条件より

$$N=\mathbf{531} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(5) 小さい順に並べるとき，百の位が 1，2，3 となる数がそれぞれ

${}_6\mathrm{P}_2=6\cdot 5=30$ 個で，合計 $30+30+30=90$ 個

次に百の位が 4 で，十の位が 1，2，3 となる数がそれぞれ

5 個で，これまでの合計が $90+(5+5+5)=105$ 個

次に小さい順に並べると

$$451,\ 452,\ 453,\ 456,\ \cdots$$

となるので，小さい順に並べて 109 番目の数は

$$\mathbf{456} \qquad \cdots\cdots(答)$$