

Aさんは1が書かれたカードを1枚、2が書かれたカードを2枚、4が書かれたカードを1枚、計4枚を無作為に横一列に並べて4桁の数 X を作る。Bさんは2が書かれたカードを2枚、3が書かれたカードを2枚、計4枚を無作為に横一列に並べて4桁の数 Y を作る。

(1) X が4の倍数となる確率を求めよ。

(2) $X < Y$ となる確率を求めよ。

(20 千葉大 1)

【答】

(1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{47}{72}$

【解答】

(1) 4枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ を並べてできる4桁の数 X は

$$\frac{4!}{1!2!1!} = 12 \text{ 通り}$$

あり、これらの起こり方は同様に確からしい。

X が4の倍数となるのは、下2桁が4の倍数のときであり

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{2,4} \boxed{1}\boxed{2} \text{ または } \underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{1,2} \boxed{2}\boxed{4}$$

となるときである。上2桁のカードの並び方も数えると、求める確率は

$$\frac{2+2}{12} = \frac{1}{3}$$

……(答)

である。

(2) 4枚のカード $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$ を並べてできる4桁の数 Y は

$$\frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ 通り}$$

あり、これらの起こり方は同様に確からしい。

$X < Y$ となるのは

- X が $\boxed{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{2,2,4}$ のとき、 Y は任意
- X が $\boxed{2}\boxed{1}\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{2,4}$ のとき、 Y は任意
- X が $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{4}$ のとき、 Y は任意
- X が $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{4}\boxed{1}$ のとき、 Y は $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}$ 以外の5通り
- X が $\boxed{2}\boxed{4}\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{2,4}$ のとき、 Y は $\boxed{3}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}$, $\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}$, $\boxed{3}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{2}$ の3通り

であり、これらは排反であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} & \frac{3}{12} \cdot 1 + \frac{2}{12} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{3+2+1}{12} + \frac{5}{12 \cdot 6} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{36+5+6}{12 \cdot 6} \\ &= \frac{47}{72} \end{aligned}$$

……(答)

である。

- 余事象を考える. $X = Y$ となることはない. $X > Y$ となるのは

◦ X が $\boxed{4}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{1,2,2}$ のとき, Y は任意

◦ X が $\boxed{2}\boxed{4}\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{1,2}$ のとき, Y は $\boxed{2}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{2,3,3}$ の 3 通り

◦ X が $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{4}\boxed{1}$ のとき, Y は $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}$ の 1 通り

であり, これらは排反であるから, 求める確率は

$$\begin{aligned} & 1 - \left(\frac{3}{12} \cdot 1 + \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} \right) \\ &= 1 - \frac{18+6+1}{12 \cdot 6} \\ &= \frac{47}{72} \end{aligned}$$

である.