

Aさんは1が書かれたカードを1枚, 2が書かれたカードを2枚, 4が書かれたカードを1枚, 計4枚を無作為に横一列に並べて4桁の数Xを作る. Bさんは2が書かれたカードを2枚, 3が書かれたカードを2枚, 計4枚を無作為に横一列に並べて4桁の数Yを作る.

(1) Xが4の倍数となる確率を求めよ.

(2) X < Yとなる確率を求めよ.

(20千葉大1)

【答】

(1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{47}{72}$

【解答】

(1) 4枚のカード $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{4}$ を並べてできる4桁の数Xは

$$\frac{4!}{1!2!1!} = 12 \text{通り}$$

あり, これらの起こり方は同様に確からしい.

Xが4の倍数となるのは, 下2桁が4の倍数のときであり

$$\underbrace{\boxed{} \boxed{}}_{2,4} \boxed{1} \boxed{2} \text{ または } \underbrace{\boxed{} \boxed{}}_{1,2} \boxed{2} \boxed{4}$$

となるときである. 上2桁のカードの並び方も数えると, 求める確率は

$$\frac{2+2}{12} = \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(2) 4枚のカード $\boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{3}$ を並べてできる4桁の数Yは

$$\frac{4!}{2!2!} = 6 \text{通り}$$

あり, これらの起こり方は同様に確からしい.

X < Yとなるのは

- Xが $\boxed{1} \underbrace{\boxed{} \boxed{} \boxed{}}_{2,2,4}$ のとき, Yは任意
- Xが $\boxed{2} \boxed{1} \underbrace{\boxed{} \boxed{}}_{2,4}$ のとき, Yは任意
- Xが $\boxed{2} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{4}$ のとき, Yは任意
- Xが $\boxed{2} \boxed{2} \boxed{4} \boxed{1}$ のとき, Yは $\boxed{2} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{3}$ 以外の5通り
- Xが $\boxed{2} \boxed{4} \underbrace{\boxed{} \boxed{}}_{2,4}$ のとき, Yは $\boxed{3} \boxed{2} \boxed{2} \boxed{3}, \boxed{3} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{2}, \boxed{3} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{2}$ の3通り

であり, これらは排反であるから, 求める確率は

$$\begin{aligned} & \frac{3}{12} \cdot 1 + \frac{2}{12} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{3+2+1}{12} + \frac{5}{12 \cdot 6} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{36+5+6}{12 \cdot 6} \\ &= \frac{47}{72} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である.

- 余事象を考える。 $X = Y$ となることはない。 $X > Y$ となるのは

- X が $\boxed{4 \underbrace{\quad \quad \quad}_{1,2,2}}$ のとき, Y は任意

- X が $\boxed{2 \boxed{4 \underbrace{\quad \quad}_{1,2}}}$ のとき, Y は $\boxed{2 \underbrace{\quad \quad \quad}_{2,3,3}}$ の 3 通り

- X が $\boxed{2 \boxed{2 \boxed{4 \boxed{1}}}}$ のとき, Y は $\boxed{2 \boxed{2 \boxed{3 \boxed{3}}}}$ の 1 通り

であり、これらは排反であるから、求める確率は

$$\begin{aligned}
 & 1 - \left(\frac{3}{12} \cdot 1 + \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} \right) \\
 & = 1 - \frac{18 + 6 + 1}{12 \cdot 6} \\
 & = \frac{47}{72}
 \end{aligned}$$

である。