でその中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返す．n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とし，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる確率を p_n とする．

(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n を求めよ．

(3) $n \geqq 4$ とする．S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3 = 5$ であったとき，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる条件付き確率 q_n を求めよ．

(20 千葉大 6)

【答】

(1) $p_2 = \dfrac{8}{25}$，$p_3 = \dfrac{24}{125}$

(2) $p_n = \dfrac{8 \cdot 3^{n-2}}{5^n}$

(3) $q_n = \dfrac{2 \cdot 3^{n-4}}{5^{n-3}}$

【解答】

で

(1) p_2 は 2 回目に初めて $S_2 = a_1 + a_2$ が 3 の倍数になる確率，すなわち，a_1 は 3 の倍数でなく，$a_1 + a_2$ が 3 の倍数である確率である．

1 から 5 までの整数を 3 で割った余り 0，1，2 で分類し

$$r_0 = \{3\}, \quad r_1 = \{1,\ 4\}, \quad r_2 = \{2,\ 5\}$$

とする．以後，3 を法とする合同式を考える．

$a_1 \not\equiv 0$ となる確率は $\dfrac{4}{5}$ である．このとき，$a_1 \equiv 1$ または 2 のいずれかであり

$$(*) \begin{cases} a_1 \equiv 1 \text{ のとき}, a_1 + a_2 \equiv 0 \text{ となるのは}, a_2 \equiv 2 \text{ のときであり}, \\ a_1 \equiv 2 \text{ のとき}, a_1 + a_2 \equiv 0 \text{ となるのは}, a_2 \equiv 1 \text{ のときである}. \end{cases}$$

どちらの確率も $\dfrac{2}{5}$ である．したがって

$$p_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \mathbf{\frac{8}{25}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- $a_1 \equiv 1$ または 2 で場合分けすると

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & a_2 \\ r_1 & \text{———} & r_2 \\ r_2 & \text{———} & r_1 \end{array}$$

であるから

$$p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$$

p_2 での考察 $(*)$ を一般化すると

$S_n \not\equiv 0$ のとき，$S_{n+1} \equiv 0$ となる確率は $\dfrac{2}{5}$

である．したがって

$S_n \fallingdotseq 0$ のとき，$S_{n+1} \fallingdotseq 0$ となる確率は $\dfrac{3}{5}$

でもある．これより

$$p_3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \boldsymbol{\frac{24}{125}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 3 回目に初めて S_3 が 3 の倍数になるのは

$$\begin{array}{lll} a_1 & a_2 & a_3 \\ & r_0 & r_2 \\ r_1 & & \\ & r_1 & r_1 \\ & r_0 & r_1 \\ r_2 & & \\ & r_2 & r_2 \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{2}{5} \\ &= 2\times\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{24}{125} \end{aligned}$$

(2) p_3 と同様に考えて

$$p_n = \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}\cdot\frac{2}{5} = \boldsymbol{\frac{8\cdot 3^{n-2}}{5^n}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $A_3 : S_1,\ S_2,\ S_3$が 3 の倍数でなく $a_3 = 5$ となるという事象

$B_n : n$ 回目に初めて S_nが 3 の倍数になるという事象

とする．求める確率 q_n は

$$\begin{aligned} q_n = P_{A_3}(B_n) &= \frac{P(A_3\cap B_n)}{P(A_3)} \\ &= \frac{P(A_3)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-4}\cdot\frac{2}{5}}{P(A_3)} \\ &= \boldsymbol{\frac{2\cdot 3^{n-4}}{5^{n-3}}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- $P(A_3)$ を求めておこう．$a_3 = 5(\in r_2)$ に注意すると

$$\begin{array}{lll} a_1 & a_2 & a_3 \\ & r_0 & r_0,\ r_1\ (\text{不適}) \\ r_1 & & \\ & & r_0\ (\text{不適}) \\ & r_1 & \\ & & 5\in r_2 \\ & & r_0\ (\text{不適}) \\ & r_0 & \\ r_2 & & 5\in r_2 \\ & r_2 & r_0,\ r_1\ (\text{不適}) \end{array}$$

であるから

$$P(A_3) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{6}{125}$$