

でその中から1枚取り出して戻すという試行を繰り返す. n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とし, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする. n 回目に初めて S_n が3の倍数になる確率を p_n とする.

- (1) p_2, p_3 を求めよ.
- (2) $n \geq 2$ のとき, p_n を求めよ.
- (3) $n \geq 4$ とする. S_1, S_2, S_3 が3の倍数でなく $a_3 = 5$ であったとき, n 回目に初めて S_n が3の倍数になる条件付き確率 q_n を求めよ.

(20 千葉大 6)

【答】

$$(1) p_2 = \frac{8}{25}, p_3 = \frac{24}{125}$$

$$(2) p_n = \frac{8 \cdot 3^{n-2}}{5^n}$$

$$(3) q_n = \frac{2 \cdot 3^{n-4}}{5^{n-3}}$$

【解答】

で

- (1) p_2 は2回目に初めて $S_2 = a_1 + a_2$ が3の倍数になる確率, すなわち, a_1 は3の倍数でなく, $a_1 + a_2$ が3の倍数である確率である.

1 から 5 までの整数を 3 で割った余り 0, 1, 2 で分類し

$$r_0 = \{3\}, \quad r_1 = \{1, 4\}, \quad r_2 = \{2, 5\}$$

とする. 以後, 3 を法とする合同式を考える.

$a_1 \not\equiv 0$ となる確率は $\frac{4}{5}$ である. このとき, $a_1 \equiv 1$ または 2 のいずれかであり

$$(*) \begin{cases} a_1 \equiv 1 \text{ のとき, } a_1 + a_2 \equiv 0 \text{ となるのは, } a_2 \equiv 2 \text{ のときであり,} \\ a_1 \equiv 2 \text{ のとき, } a_1 + a_2 \equiv 0 \text{ となるのは, } a_2 \equiv 1 \text{ のときである.} \end{cases}$$

どちらの確率も $\frac{2}{5}$ である. したがって

$$p_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{25} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- $a_1 \equiv 1$ または 2 で場合分けすると

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ r_1 & \text{---} r_2 \\ r_2 & \text{---} r_1 \end{array}$$

であるから

$$p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$$

p_2 での考察 (*) を一般化すると

$$S_n \not\equiv 0 \text{ のとき, } S_{n+1} \equiv 0 \text{ となる確率は } \frac{2}{5}$$

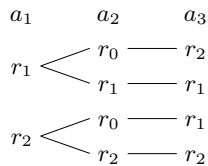
である。したがって

$$S_n \neq 0 \text{ のとき, } S_{n+1} \neq 0 \text{ となる確率は } \frac{3}{5}$$

でもある。これより

$$p_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{24}{125} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- 3 回目に初めて S_3 が 3 の倍数になるのは



であるから

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{2}{5} \\ &= 2 \times \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{24}{125} \end{aligned}$$

- (2) p_3 と同様に考えて

$$p_n = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8 \cdot 3^{n-2}}{5^n} \quad \dots\dots(\text{答})$$

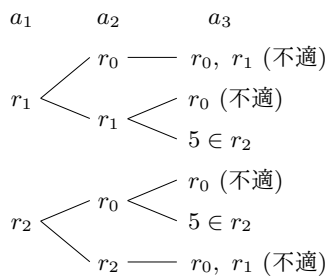
- (3) $A_3: S_1, S_2, S_3$ が 3 の倍数でなく $a_3 = 5$ となるという事象

$B_n: n$ 回目に初めて S_n が 3 の倍数になるという事象

とする。求める確率 q_n は

$$\begin{aligned} q_n &= P_{A_3}(B_n) = \frac{P(A_3 \cap B_n)}{P(A_3)} \\ &= \frac{P(A_3) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-4} \cdot \frac{2}{5}}{P(A_3)} \\ &= \frac{2 \cdot 3^{n-4}}{5^{n-3}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

- $P(A_3)$ を求めておこう。 $a_3 = 5 (\in r_2)$ に注意すると



であるから

$$P(A_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{125}$$