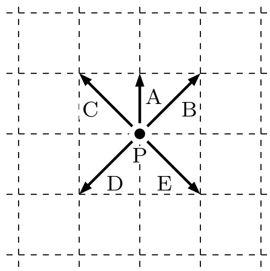
右図のように，xy 平面上の格子点 (x 座標および y 座標が共に整数となる点) 上に点 P がある．点 P が座標 $(x,\ y)$ にあるとき，点 P は 1 回の操作で，次の A，B，C，D，E のいずれか一つを等しい確率で選び，格子点上を移動するものとする．



A: $(x,\ y)$ から $(x,\ y+1)$ に移動する．
B: $(x,\ y)$ から $(x+1,\ y+1)$ に移動する．
C: $(x,\ y)$ から $(x-1,\ y+1)$ に移動する．
D: $(x,\ y)$ から $(x-1,\ y-1)$ に移動する．
E: $(x,\ y)$ から $(x+1,\ y-1)$ に移動する．

最初に点 P が $(0,\ 0)$ にあるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 2 回の操作後に，点 P が $(0,\ 0)$ にある確率を求めよ．
(2) n 回の操作を行ったとき，A，B，C，D，E が選ばれた回数をそれぞれ $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ とする．n 回操作後の点 P の x 座標および y 座標をそれぞれ $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ で表せ．
(3) 3 回の操作後に，点 P が $(1,\ 1)$ にある場合の d と e の組合せを求めよ．
(4) 3 回の操作後に，点 P が $(1,\ 1)$ にある確率を求めよ．
(5) m が奇数の場合，m 回の操作後に，点 P が $(1-m,\ 0)$ にある確率を求めよ．

(20 豊橋技科大 4)

【答】

(1) $\dfrac{4}{25}$
(2) x 座標は $b-c-d+e$，y 座標は $a+b+c-d-e$
(3) $(d,\ e)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$
(4) $\dfrac{12}{125}$
(5) 0

【解答】

(1) 2 回の操作後に，点 P が $(0,\ 0)$ にあるのは，1 回目の操作で A 以外の移動を行い，2 回目の操作で 1 回目と逆の移動を行うときである．求める確率は

$$\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{4}{25}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) n 回の操作において移動 A，B，C，D，E の回数がそれぞれ $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ であるから，n 回操作後の点 P の

x 座標は　$\boldsymbol{b-c-d+e}$，　……(答)
y 座標は　$\boldsymbol{a+b+c-d-e}$　……(答)

である．

(3) 3 回の操作後に点 P が $(1,\ 1)$ にあるのは，(2) より

$$(*)\begin{cases} a+b+c+d+e=3 & \cdots\cdots ① \\ b-c-d+e=1 & \cdots\cdots ② \\ a+b+c-d-e=1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を満たす 0 以上の整数 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ が存在するときである．

$$(*)\iff\begin{cases}a+b+c+d+e=3\\ a+2b+2e=4 & (\because\ ①,\ ②の辺々を加えた)\\ 2d+2e=2 & (\because\ ①,\ ③の辺々を引いた)\end{cases}$$

第 3 式より $d+e=1$ が得られ，$d,\ e$ が 0 以上の整数であることから

$$(d,\ e)=(1,\ 0)\ \text{または}\ (0,\ 1)$$

であることが必要である．

(i) $(d,\ e)=(1,\ 0)$ のとき

$$(*)\iff\begin{cases}a+b+c=2\\ a+2b=4\end{cases}$$

$a,\ b,\ c$ は 0 以上の整数であるから

$$(a,\ b,\ c)=(0,\ 2,\ 0)$$

であり，$(d,\ e)=(1,\ 0)$ は条件を満たす組である (十分)．

(ii) $(d,\ e)=(0,\ 1)$ のとき

$$(*)\iff\begin{cases}a+b+c=2\\ a+2b=2\end{cases}$$

$a,\ b,\ c$ は 0 以上の整数であるから

$$(a,\ b,\ c)=(0,\ 1,\ 1)\ \text{または}\ (2,\ 0,\ 0)$$

であり，$(d,\ e)=(0,\ 1)$ は条件を満たす組である (十分)．

よって，$d,\ e$ の組合せは

$$\boldsymbol{(d,\ e)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)}$$ ……(答)

である．

(4) (3) より，3 回の操作後に，点 P が $(1,\ 1)$ にあるのは

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)=(0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1),\ (2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$$

のときである．移動の順序も考えると，求める確率は

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\frac{1}{5}+3!\frac{1}{5}\frac{1}{5}\frac{1}{5}+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\frac{1}{5}=\frac{3+6+3}{5^3}=\boldsymbol{\frac{12}{125}}$$ ……(答)

である．

(5) m 回の操作後に点 P が $(1-m,\ 0)$ にあるのは，(2) より

$$(**)\begin{cases}a+b+c+d+e=m\\ b-c-d+e=1-m\\ a+b+c-d-e=0\end{cases}$$

を満たす 0 以上の整数 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ が存在するときである．

第 1 式と第 3 式の辺々を加えると

$$2(a+b+c)=m$$

となるが．左辺は偶数で右辺は奇数であり，不合理である．$(**)$ を満たす $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ は存在しない．

すなわち，点 P は点 $(1-m,\ 0)$ に移動することはないから，点 P が $(1-m,\ 0)$ にある確率は **0** である． ……(答)