最大確率

n を 9 以上の自然数とする．袋の中に n 個の球が入っている．このうち 6 個は赤球で残りは白球である．この袋から 6 個の球を同時に取り出すとき，3 個が赤球である確率を P_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) P_9，P_{10}，P_{15} を求めよ．

(2) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ を n の式で表せ．

(3) P_n が最大となる n を求めよ．

(20 宇都宮大 工・地デ・農 1)

【答】

(1) $P_9=\dfrac{5}{21}$，$P_{10}=\dfrac{8}{21}$，$P_{15}=\dfrac{48}{143}$

(2) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=\dfrac{(n-5)^2}{(n-8)(n+1)}$

(3) $n=11$，12

【解答】

(1) n 個の球の中から 6 個の球を取り出す場合の数は ${}_n\mathrm{C}_6$ 通りあり，これは同様に確からしい．このうち，赤球 3 個，白球 3 個を取り出すのは ${}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-6}\mathrm{C}_3$ 通りあるから

$$\begin{aligned}P_n&=\frac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-6}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_6}\\&=\frac{6!}{3!\,3!}\cdot\frac{(n-6)!}{3!\,(n-9)!}\times\frac{6!(n-6)!}{n!}\\&=2^5\cdot3\cdot5^2\times\frac{\{(n-6)!\}^2}{(n-9)!\,n!}\qquad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

である．① に $n=9$，10，15 を代入して

$$P_9=2^5\cdot3\cdot5^2\times\frac{(3!)^2}{0!\cdot9!}=\frac{2^5\cdot3\cdot5^2}{9\cdot8\cdot7\cdot5\cdot4}=\frac{5}{3\cdot7}=\boldsymbol{\frac{5}{21}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

$$P_{10}=2^5\cdot3\cdot5^2\times\frac{(4!)^2}{1!\cdot10!}=\frac{2^5\cdot3\cdot5^2}{10\cdot9\cdot7\cdot2\cdot5}=\frac{2^3}{3\cdot7}=\boldsymbol{\frac{8}{21}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

$$P_{15}=2^5\cdot3\cdot5^2\times\frac{(9!)^2}{6!\cdot15!}=\frac{2^5\cdot3\cdot5^2}{5\cdot13\cdot11\cdot10}=\frac{2^4\cdot3}{13\cdot11}=\boldsymbol{\frac{48}{143}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

を得る．

(2) ①より

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}}{P_n}&=\frac{2^5\cdot3\cdot5^2\cdot\{(n-5)!\}^2}{(n-8)!(n+1)!}\times\frac{(n-9)!n!}{2^5\cdot3\cdot5^2\cdot\{(n-6)!\}^2}\\&=\boldsymbol{\frac{(n-5)^2}{(n-8)(n+1)}}\qquad\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

(3) $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}-1$ の符号を調べる．

$$\begin{aligned}\frac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)}-1&=\frac{(n^2-10n+25)-(n^2-7n-8)}{(n+1)(n-8)}\\&=\frac{-3(n-11)}{(n+1)(n-8)}\end{aligned}$$

$n \geqq 9$ に注意すると

$n=9,\ 10$ のとき，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}-1>0 \quad \therefore\ \dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1 \quad \therefore\ P_n<P_{n+1}$

$n=11$ のとき，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}-1=0 \quad \therefore\ \dfrac{P_{n+1}}{P_n}=1 \quad \therefore\ P_n=P_{n+1}$

$n \geqq 12$ のとき，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}-1<0 \quad \therefore\ \dfrac{P_{n+1}}{P_n}<1 \quad \therefore\ P_n>P_{n+1}$

すなわち

$$P_9<P_{10}<P_{11}=P_{12},\quad P_{12}>P_{13}>\cdots$$

である．よって，P_n が最大となる n は

$$\boldsymbol{n=11,\ 12}$$ ……(答)

である．