5 人の生徒 a，b，c，d，e に対してテスト A とテスト B を行った．2 つのテストはいずれも 10 点満点で，以下の表は各生徒の得点結果である．

	a	b	c	d	e
テスト A	7	3	3	7	5
テスト B	5	4	x	y	3

テスト A の平均点はテスト B の平均点より 1 点高く，テスト B の得点の分散は 0.8 であった．このとき，2 つのテストの得点の相関係数を求めよ．ただし，x と y は負でない整数で，$x > y$ とする．

(20 青森公立大 1(3))

【答】 -0.25

【解答】

テスト A の平均点 $E(A)$ は

$$E(A) = \frac{7+3+3+7+5}{5} = 5$$

であり，テスト B の平均点 $E(B)$ は

$$E(B) = \frac{5+4+x+y+3}{5} = \frac{x+y+12}{5}$$

である．$E(A) = E(B) + 1$ より

$$E(B) = E(A) - 1 = 5 - 1 = 4$$

であり

$$\frac{x+y+12}{5} = 4 \qquad \therefore \quad x+y=8 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

また，テスト B の得点の分散 $V(B)$ は

$$\begin{aligned} V(B) &= E(B^2) - \{E(B)\}^2 \\ &= \frac{5^2+4^2+x^2+y^2+3^2}{5} - 4^2 \\ &= \frac{x^2+y^2+50}{5} - 16 \\ &= \frac{x^2+y^2-30}{5} \end{aligned}$$

であり，$V(B) = 0.8$ であるから

$$\frac{x^2+y^2-30}{5} = 0.8 \qquad \therefore \quad x^2+y^2=34 \qquad \cdots\cdots ②$$

を得る．① と ② から

$$\begin{cases} x+y=8 \\ (x+y)^2-2xy=34 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$$

x，y は

$$t^2-8t+15=0 \qquad \therefore \quad (t-3)(t-5)=0$$

の解であり，$x > y$ であることから

$$x = 5, \quad y = 3$$

である．

テスト A の得点の分散 $V(A)$ は

$$V(A) = \frac{7^2 + 3^2 + 3^2 + 7^2 + 5^2}{5} - 5^2 = \frac{141 - 125}{5} = \frac{16}{5}$$

であり，共分散 s_{AB} は

$$\begin{aligned} s_{AB} &= \frac{1}{5}\{(7-5)(5-4) + (3-5)(4-4) + (3-5)(5-4) \\ &\qquad + (7-5)(3-4) + (5-5)(3-4)\} \\ &= \frac{1}{5}(2 + 0 - 2 - 2 + 0) \\ &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

であるから，2 つのテストの得点の相関係数は

$$\frac{s_{AB}}{\sqrt{V(A)}\sqrt{V(B)}} = \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{8}{10}}} = -\frac{2}{4 \cdot 2} = \mathbf{-0.25} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．