x, y は正の実数とする．連立不等式

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leqq 5 & \cdots\cdots ② \\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3} \leqq 1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

について考える．

$X = \log_3 x$，$Y = \log_3 y$ とおくと，② は

$$\boxed{\text{ヌ}}X + Y \leqq \boxed{\text{ネノ}} \qquad \cdots\cdots ④$$

と変形でき，③は

$$\boxed{\text{ハ}}X - Y \geqq \boxed{\text{ヒフ}} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

と変形できる．

X, Y が ④ と ⑤ を満たすとき，Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ヘ}}$ である．また，x, y が ②，③ と $\log_3 y = \boxed{\text{ヘ}}$ を同時に満たすとき，x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ホ}}$ である．

(20 センタ本試 IIB 1[2](2))

【答】

ヌ	ネノ	ハ	ヒフ	ヘ	ホ
2	10	3	-4	7	5

【解答】

$X = \log_3 x$，$Y = \log_3 y$ とおくと

$$\log_3(x\sqrt{y}) = \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 y = X + \frac{Y}{2}$$

$$\log_{81}\frac{y}{x^3} = \frac{\log_3 y}{\log_3 3^4} - \frac{\log_3 x^3}{\log_3 3^4} = \frac{Y}{4} - \frac{3X}{4}$$

であるから

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leqq 5 & \cdots\cdots ② \\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3} \leqq 1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

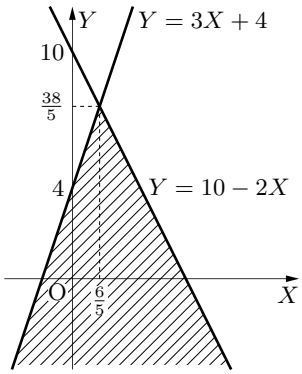
$$\iff \begin{cases} X + \dfrac{Y}{2} \leqq 5 \\ \dfrac{Y}{4} - \dfrac{3X}{4} \leqq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{\mathbf{2}}X + Y \leqq \boxed{\mathbf{10}} & \cdots\cdots ④ \quad \cdots\cdots (\text{ヌ，ネノの答}) \\ \boxed{\mathbf{3}}X - Y \geqq \boxed{\mathbf{-4}} & \cdots\cdots ⑤ \quad \cdots\cdots (\text{ハ，ヒフの答}) \end{cases}$$

と変形できる．

$X,\ Y$ が ④ と ⑤ を満たすとき

$$\begin{cases} Y \leqq 10 - 2X \\ Y \leqq 3X + 4 \end{cases}$$



2 直線 $Y = 10 - 2X,\ Y = 3X + 4$ の交点の座標は

$$\left(\frac{6}{5},\ \frac{38}{5}\right)$$

であり,「④ かつ ⑤」が表す領域は右図と斜線部分である.

よって，$Y \leqq \dfrac{38}{5}$ であり，Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\mathbf{7}}$ である. …… (への答)

また，$x,\ y$ が ②，③ と $\log_3 y = 7$ を同時に満たすとき

$$\begin{cases} 7 \leqq 10 - 2X \\ 7 \leqq 3X + 4 \end{cases} \iff 1 \leqq X \leqq \frac{3}{2} \iff \log_3 3 \leqq \log_3 x \leqq \log_3 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\quad 3 \leqq x \leqq \sqrt{27}$$

x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\mathbf{5}}$ である. …… (ホの答)