次の $\boxed{\phantom{ア}}$ にあてはまる数値を答えよ．

実数 $x,\ y$ が $x \geqq 3,\ y \geqq \dfrac{1}{9},\ x^2y = 3^6$ を満たすとき，$z = (\log_3 x)(\log_3 y)$ の最大値と最小値を求めよう．

$X = \log_3 x,\ Y = \log_3 y$ とすると，次のことがいえる．

(1) 実数 $x,\ y$ が $x \geqq 3,\ y \geqq \dfrac{1}{9}$ を満たすとき，$X$ と $Y$ の値の範囲は，

$$X \geqq \boxed{\text{ア}},$$
$$Y \geqq -\boxed{\text{イ}}$$

である．

$x^2y = 3^6$ は，$X$ と $Y$ を用いて

$$\boxed{\text{ウ}}X + Y = \boxed{\text{エ}}$$

と表すことができる．

(2) (1) より，$X$ の値の範囲は

$$\boxed{\text{ア}} \leqq X \leqq \boxed{\text{オ}}$$

である．

また，$z = (\log_3 x)(\log_3 y)$ は，$X$ を用いて

$$z = -\boxed{\text{カ}}X^2 + \boxed{\text{キ}}X$$

と表すことができる．

$z$ の最大値と最小値を求めると，

$$x = \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\text{のとき，最大値}\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},$$
$$x = \boxed{\text{シス}}\text{のとき，最小値}-\boxed{\text{セ}}$$

である．

(20 神戸学院大 法・経・栄養・リハ・薬 3)

【答】

| ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | コ | サ | シス | セ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 6 | 4 | 2 | 6 | 3 | 3 | 9 | 2 | 81 | 8 |

【解答】

(1) 実数 $x,\ y$ が $x \geqq 3,\ y \geqq \dfrac{1}{9}$ を満たすとき，$X = \log_3 x,\ Y = \log_3 y$ とすると，$X$ と $Y$ の値の範囲は

$$X \geqq \log_3 3 = \boxed{\mathbf{1}} \quad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots \text{(アの答)}$$
$$Y \geqq \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -\boxed{\mathbf{2}} \quad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots \text{(イの答)}$$

である．

$x^2y = 3^6$ は，$X$ と $Y$ を用いて

$$\log_3(x^2y) = \log_3 3^6$$
$$2\log_3 x + \log_3 y = 6\log_3 3$$
$$\therefore \quad \boxed{\mathbf{2}}X + Y = \boxed{\mathbf{6}} \qquad \cdots\cdots ③$$

…… (ウ，エの答)

と表すことができる．

(2) (1) の②かつ③より

$$\begin{cases} Y \geqq -2 \\ Y = 6 - 2X \end{cases} \qquad \therefore \quad 6 - 2X \geqq -2 \qquad \therefore \quad X \leqq 4$$

① とあわせると，$X$ の値の範囲は

$$1 \leqq X \leqq \boxed{\mathbf{4}}$$

…… (オの答)

である．

また，$z = (\log_3 x)(\log_3 y)$ は，$X$ を用いて

$$z = XY = X(6 - 2X) = -\boxed{\mathbf{2}}X^2 + \boxed{\mathbf{6}}X$$

…… (カ，キの答)

と表すことができる．

$$z = -2\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \quad (1 \leqq X \leqq 4)$$

$z$ は $X = \dfrac{3}{2}$ のとき最大となる，すなわち

$$x = 3^{\frac{3}{2}} = \boxed{\mathbf{3}}\sqrt{\boxed{\mathbf{3}}}\text{のとき，最大値}\frac{\boxed{\mathbf{9}}}{\boxed{\mathbf{2}}}$$

…… (ク〜サの答)

をとる．

また，$z$ は $X = 4$ のとき最小となる，すなわち

$$x = 3^4 = \boxed{\mathbf{81}}\text{のとき，最小値} - \boxed{\mathbf{8}}$$

…… (シス〜セの答)

をとる．