実数 x が $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ を満たすとする．$\tan x + \dfrac{1}{\tan x}$ は $x = \boxed{\text{エ}}$ のとき最小値をとる．また，$4\sin x + \dfrac{1}{\cos x} = 4\sqrt{\tan x}$ が成り立つとき，$\cos x$ の値は $\boxed{\text{オ}}$ となる．

(20 北里大 獣医 2)

【答】

エ	オ
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

【解答】

$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，$\tan x > 0$ だから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} \geqq 2\sqrt{\tan x \cdot \frac{1}{\tan x}} = 2$$

が成り立ち，等号が成り立つのは

$$\tan x = \frac{1}{\tan x} \qquad \therefore \quad \tan x = 1$$

$$\therefore \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \left(\because\ 0 < x \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

のときである．したがって，$\tan x + \dfrac{1}{\tan x}$ は

$$x = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のとき最小値 2 をとる．

また，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，$\sin x > 0$，$\cos x > 0$ だから，相加平均と相乗平均の関係より

$$4\sin x + \frac{1}{\cos x} \geqq 2\sqrt{4\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}} = 4\sqrt{\tan x}$$

が成り立ち，等号は

$$4\sin x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cdots\cdots ①$$

のとき成り立つ．① と $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を連立すると

$$\left(\frac{1}{4\cos x}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$16\cos^4 - 16\cos^2 x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$$

$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ より，$1 > \cos x \geqq \dfrac{1}{2}$ であり，$\cos x$ の値は

$$\cos x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $4\sin x + \dfrac{1}{\cos x} = 4\sqrt{\tan x}$ が成り立つとき

$$4\sin x\cos x + 1 = 4\sqrt{\tan x\cos^2 x} \quad (\because \quad \cos x > 0)$$
$$2\sin 2x + 1 = 2\sqrt{2}\sqrt{\sin 2x}$$

両辺を 2 乗して

$$4\sin^2 2x - 4\sin 2x + 1 = 0$$
$$(2\sin 2x - 1)^2 = 0$$
$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ より

$$2x = \frac{\pi}{6} \qquad \therefore \quad x = \frac{\pi}{12}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

……(答)

である．