$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において，$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta - \cos\theta$ の値を求めよ．

(20 広島工大 5(1))

【答】 $\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

【解答】

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ と $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を連立する．

$$\sin^2\theta + \left(\frac{1}{3} - \sin\theta\right)^2 = 1$$
$$2\sin^2\theta - \frac{2}{3}\sin\theta - \frac{8}{9} = 0$$
$$9\sin^2\theta - 3\sin\theta - 4 = 0$$
$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{3 \pm 3\sqrt{17}}{18} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{6}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\sin\theta \geqq 0$ であるから

$$\sin\theta = \frac{1 + \sqrt{17}}{6}$$

である．このとき

$$\cos\theta = \frac{1}{3} - \frac{1 + \sqrt{17}}{6} = \frac{1 - \sqrt{17}}{6}$$

であり，求める値は

$$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1 + \sqrt{17}}{6} - \frac{1 - \sqrt{17}}{6} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{17}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{9}$$
$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{9}$$
$$\therefore \quad \sin\theta\cos\theta = -\frac{4}{9} \qquad \cdots\cdots (*)$$

である．これより

$$\begin{aligned}(\sin\theta - \cos\theta)^2 &= 1 - 2\sin\theta\cos\theta \\ &= 1 - 2\left(-\frac{4}{9}\right) \\ &= \frac{17}{9}\end{aligned}$$

である．$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\sin\theta \geqq 0$ かつ $\cos\theta \leqq 0$ であるから

$$\sin\theta - \cos\theta \geqq 0$$

であり

$$\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

である．

- $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ と $(*)$ より，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は方程式

$$t^2 - \frac{1}{3}t - \frac{4}{9} = 0$$

の解 (数学 II) であり

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{6}$$

である．$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\sin\theta \geqq 0$ かつ $\cos\theta \leqq 0$ であるから

$$\sin\theta = \frac{1+\sqrt{17}}{6}, \quad \cos\theta = \frac{1-\sqrt{17}}{6}$$

であり

$$\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

である．