△ABC において，$\mathrm{BC}=2\sqrt{2}$ とする．∠ACB の二等分線と辺 AB の交点を D とし，$\mathrm{CD}=\sqrt{2}$，$\cos\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{3}{4}$ とする．このとき，$\mathrm{BD}=\boxed{\text{ア}}$ であり

$$\sin\angle\mathrm{ADC}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である．$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ であるから

$$\mathrm{AD}=\boxed{\text{カ}}$$

である．また，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

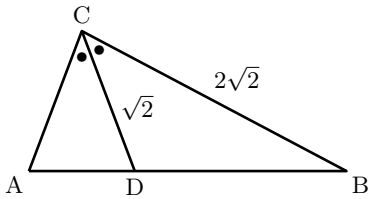
(20 センター IA 2(1))

【答】

ア	イウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
2	14	4	2	1	4	7	7

【解答】

△BCD において余弦定理を用いると



$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{BCD}\\&=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}\\&=8+2-6\\&=4\end{aligned}$$

$\therefore\quad \mathrm{BD}=\boxed{\mathbf{2}}$ …… (アの答)

$\sin\angle\mathrm{ADC}=\sin(180^\circ-\angle\mathrm{BDC})=\sin\angle\mathrm{BDC}$ である．△BCD において正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BDC}}=\frac{\mathrm{BD}}{\sin\angle\mathrm{BCD}}$$

$\sin\angle\mathrm{BCD}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{BDC}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}}\sin\angle\mathrm{BCD}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

$\therefore\quad \sin\angle\mathrm{ADC}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\mathbf{14}}}}{\boxed{\mathbf{4}}}$ …… (イウ，エの答)

$\angle\mathrm{ACD} = \angle\mathrm{BCD}$ より，$\sin\angle\mathrm{ACD} = \sin\angle\mathrm{BCD} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ であり，$\triangle\mathrm{ACD}$ において正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AD}}{\sin\angle\mathrm{ACD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ADC}}$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} = \frac{\sin\angle\mathrm{ADC}}{\sin\angle\mathrm{ACD}} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \sqrt{\boxed{\mathbf{2}}} \qquad \cdots\cdots \text{(オの答)}$$

- CD は $\angle\mathrm{ACB}$ の二等分線であるから

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = \mathrm{AC} : \mathrm{CB}$$

$$\therefore\quad \mathrm{DB}\cdot\mathrm{AC} = \mathrm{AD}\cdot\mathrm{CB}$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{DB}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

次に，AD の長さを求める．まず

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{ADC} &= \cos(180^\circ - \angle\mathrm{BDC}) = -\cos\angle\mathrm{BDC}\\ &= -\frac{(\sqrt{2})^2 + 2^2 - (2\sqrt{2})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

であるから，$\triangle\mathrm{ACD}$ において余弦定理を用いると

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{CD}^2 - 2\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{ADC}$$

$$(\sqrt{2}\mathrm{AD})^2 = \mathrm{AD}^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\cdot\mathrm{AD}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\because\ \mathrm{AC} = \sqrt{2}\mathrm{AD})$$

$$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD} - 2 = 0$$

$$(\mathrm{AD}+2)(\mathrm{AD}-1) = 0$$

$\mathrm{AD} > 0$ より　$\mathrm{AD} = \boxed{\mathbf{1}}$ $\cdots\cdots$ (カの答)

- $\sin\angle\mathrm{ADC} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$ のみだと

$$\cos\angle\mathrm{ADC} = \pm\sqrt{1-\sin^2\angle\mathrm{ADC}} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

であり，$\cos\angle\mathrm{ADC} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ と絞り込めない．

また，$\cos\angle\mathrm{BCD} = \dfrac{3}{4}$ を考慮して，余弦定理を

$$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{CD}^2 - 2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{ACD}$$

として用いると

$$\mathrm{AD}^2 = (\sqrt{2}\mathrm{AD})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\cdot\sqrt{2}\mathrm{AD}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{AD}^2 - 3\mathrm{AD} + 2 = 0$$

$$(\mathrm{AD}-1)(\mathrm{AD}-2) = 0$$

AD の長さは「1 または 2 」となり，この段階では AD の長さが絞り切れず，さらなる考察が必要となる．

最後に，△ABC の外接円の半径 R を求める．$\mathrm{AC} = \sqrt{2}$ であり，△ACD は $\mathrm{AC} = \mathrm{CD}$ の二等辺三角形である．C から AD に下した垂線の足を H とすると

$$\mathrm{CH} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\therefore \quad \sin\angle\mathrm{CAD} = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

△ABC において正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{CAB}} = 2R$$

$\sin\angle\mathrm{CAB} = \sin\angle\mathrm{CAD} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$ より

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{14}}{4}} = \frac{\boxed{\mathbf{4}}\sqrt{\boxed{\mathbf{7}}}}{\boxed{\mathbf{7}}} \qquad \cdots\cdots \text{(キ〜ケの答)}$$