定められた $\theta\ (0<\theta<\pi)$ と $a\ (a>0)$ について，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ と $\mathrm{BC}=a$ を満たす三角形 ABC のうちで，面積が最大になるものを考える．そのような三角形の辺 AB の長さと面積 S を，θ と a を用いて表すと，$\mathrm{AB}=\boxed{\text{ア}}$，$S=\boxed{\text{イ}}$ である．

(20 京都薬大 薬 1(1))

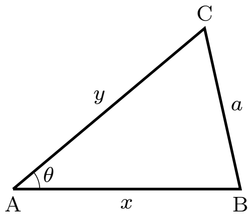
【答】

ア	イ
$\dfrac{a}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}$	$\dfrac{a^2\sin\theta}{4(1-\cos\theta)}$

【解答】

$\mathrm{AB}=x,\ \mathrm{AC}=y$ とおくと

$$S=\frac{1}{2}xy\sin\theta$$



である．$x,\ y>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$S\leqq\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{2}\sin\theta=\frac{x^2+y^2}{4}\sin\theta$$

等号は $x^2=y^2$，すなわち $x=y$ のとき成立する．このとき

$$S=\frac{x^2}{2}\sin\theta$$

である．

また，S が最大となる $x=y$ のとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ において余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}a^2&=x^2+y^2-2xy\cos\theta\\&=x^2+x^2-2x^2\cos\theta\\&=2x^2(1-\cos\theta)\end{aligned}$$

$0<\theta<\pi$ より $\cos\theta\fallingdotseq 1$ であるから

$$x^2=\frac{a^2}{2(1-\cos\theta)}$$

である．よって，求める値は

$$\mathrm{AB}=x=\sqrt{\frac{a^2}{2(1-\cos\theta)}}=\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2(1-\cos\theta)}\sin\theta=\boldsymbol{\frac{a^2\sin\theta}{4(1-\cos\theta)}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 半角の公式，2 倍角の公式 (数学 II) を用いて，さらに変形すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\frac{a}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}=\frac{a}{\sqrt{2\cdot 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}}\\&=\frac{a}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\qquad\left(\because\ 0<\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\text{ より }\sin\frac{\theta}{2}>0\right)\end{aligned}$$

$$S=\frac{a^2\sin\theta}{4(1-\cos\theta)}=\frac{a^2\cdot 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{4\cdot 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{a^2}{4\tan\dfrac{\theta}{2}}$$