AB $= 4$, BC $= 6$, CA $= 5$ の △ABC がある．△ABC の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) BD の長さを求めよ．

(2) AI の長さを求めよ．

(3) △ABI の面積 S を求めよ．

(20 北星学園大 3)

【答】

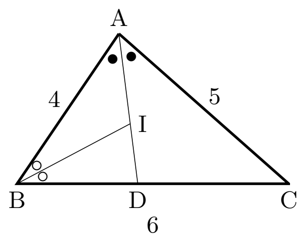
(1) BD $= \dfrac{8}{3}$

(2) AI $= 2$

(3) $S = \sqrt{7}$

【解答】

(1) AD は ∠BAC の二等分線であるから



$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 4 : 5$$

$$\therefore \quad \mathrm{BD} = \frac{4}{9} \cdot \mathrm{BC} = \frac{4}{9} \cdot 6 = \boldsymbol{\frac{8}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) BI は ∠ABC の二等分線であるから

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = \mathrm{AB} : \mathrm{BD} = 4 : \frac{8}{3} = 3 : 2$$

$$\therefore \quad \mathrm{AI} = \frac{3}{5} \cdot \mathrm{AD}$$

ここで，△ABC で余弦定理を用いると

$$\cos B = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{27}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16}$$

これにより，△ABD で余弦定理を用いると

$$\mathrm{AD}^2 = 4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{16} = 16 + \frac{64}{9} - 12 = \frac{100}{9}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AD} = \frac{10}{3}$$

よって

$$\mathrm{AI} = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} = \mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) △ABI の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{5}\triangle\mathrm{ABD} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{8}{3} \sin B \\ &= \frac{16}{5}\sqrt{1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2} = \frac{16}{5} \, \frac{\sqrt{(16+9)(16-9)}}{16} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{7}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．