$\triangle$ABC において，AB $=$ AC $= p$, BC $= q$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $\triangle$ABC の外接円の半径 R を p, q を用いて表せ．

(2) $\triangle$ABC の内接円の半径 r を p, q を用いて表せ．

(3) p と q が整数であり，$rR = \dfrac{25}{2p+q}$ が成り立つとき，p と q を求めよ．

(20 名城大 理工 2 月 2 日 2)

【答】

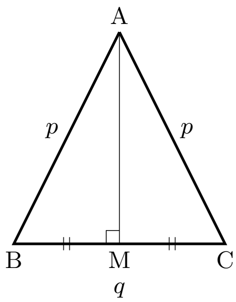
(1) $R = \dfrac{p^2}{\sqrt{4p^2-q^2}}$

(2) $r = \dfrac{q\sqrt{4p^2-q^2}}{2(2p+q)}$

(3) $(p,\ q) = (5,\ 2)$

【解答】

(1) 辺 BC の中点を M とすると，$\angle$AMB $= 90^\circ$ であり，三平方の定理より



$$\mathrm{AM} = \sqrt{p^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4p^2-q^2}}{2}$$

である．したがって

$$\sin B = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{4p^2-q^2}}{2p}$$

であり，$\triangle$ABC で正弦定理を用いると

$$R = \frac{\mathrm{AC}}{2\sin B} = \frac{p}{2}\cdot\frac{2p}{\sqrt{4p^2-q^2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{p^2}{\sqrt{4p^2-q^2}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\triangle$ABC の面積を 2 通りに考えると

$$\triangle\mathrm{ABC} = r\cdot\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2} = \frac{r(2p+q)}{2},$$

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B = \frac{1}{2}pq\cdot\frac{\sqrt{4p^2-q^2}}{2p} = \frac{q\sqrt{4p^2-q^2}}{4}$$

であるから

$$\frac{r(2p+q)}{2} = \frac{q\sqrt{4p^2-q^2}}{4}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r = \frac{q\sqrt{4p^2-q^2}}{2(2p+q)}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (1)，(2) の結果から

$$rR = \frac{q\sqrt{4p^2-q^2}}{2(2p+q)} \cdot \frac{p^2}{\sqrt{4p^2-q^2}} = \frac{p^2q}{2(2p+q)}$$

となるから，$rR = \dfrac{25}{2p+q}$ が成り立つとき

$$\frac{p^2q}{2(2p+q)} = \frac{25}{2p+q}$$
$$\therefore\quad p^2q = 50$$

である．これを満たす整数 $p,\ q\ (>0)$ の組は

$$p^2q = 1^2\cdot 50,\ 5^2\cdot 2$$
$$\therefore\quad (p,\ q) = (1,\ 50),\quad (5,\ 2)$$

であるが，三角形の成立条件から

$$p-p<q<p+p \text{ すなわち } 0<q<2p$$

が成り立つ必要がある．

よって，求める $p,\ q$ の組は

$$\boldsymbol{(p,\ q) = (5,\ 2)} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．