平面上の四角形 ABCD が円に内接している．

$$a = \mathrm{AB},\quad b = \mathrm{BC},\quad c = \mathrm{CD},\quad d = \mathrm{DA},$$
$$x = \mathrm{BD},\quad y = \mathrm{AC},\quad \theta = \angle\mathrm{BAD}$$

とする．次の問に答えよ

(1) x^2 を a, d, θ を用いて表せ．

(2) 次の等式を証明せよ．

$$x^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$

(3) 次の等式を証明せよ．

$$xy = ac + bd$$

(20 大阪教大 1)

【答】

(1) $x^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta$

(2) 略

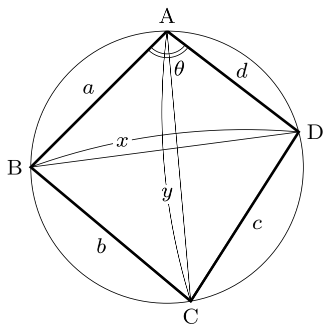
(3) 略

【解答】

(1) $\triangle$ABD において余弦定理を用いると

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta \qquad \cdots\cdots ①$$

である．



(2) $\triangle$BCD において余弦定理を用いる．

$\angle\mathrm{BAD} + \angle\mathrm{BCD} = 180^\circ$ であるから

$$\begin{aligned} x^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - \theta) \\ &= b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta \qquad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

である．① $\times\, bc$ ＋ ② $\times\, ad$ として，$\cos\theta$ を消去すると

$$\begin{aligned} (ad+bc)x^2 &= bc(a^2+d^2) + ad(b^2+c^2) \\ &= bca^2 + d(b^2+c^2)a + bcd^2 \\ &= (ba+cd)(ca+bd) \end{aligned}$$

よって

$$x^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

(3) (1)，(2) と同じようにして，y^2 を a, b, c, d を用いて表すと

$$y^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} \qquad \cdots\cdots ④$$

③，④より

$$\begin{aligned} x^2y^2 &= \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} \cdot \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} \\ &= (ac+bd)^2 \end{aligned}$$

$xy > 0,\ ac+bd > 0$ であるから

$$xy = ac+bd \qquad \cdots\cdots\ (\text{証明終わり})$$

が成り立つ．

- (3) の結果はトレミーの定理と呼ばれている．