$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=1,\ \mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC との交点を H とする．

(1) $\angle\mathrm{BAC}$ を θ と表すとき，$\cos\theta,\ \sin\theta$ の値を求めよ．

(2) 実数 s は $0<s<1$ の範囲を動くとする．辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ．

(20 東北大 理系 1)

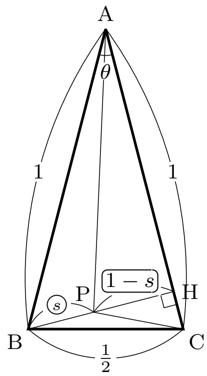
【答】

(1) $\cos\theta=\dfrac{7}{8},\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

(2) $s=\dfrac{2}{3}$ のとき，最小値 $\dfrac{15}{16}$

【解答】

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ において余弦定理を用いると



$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}\\&=\frac{1^2+1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot1\cdot1}\\&=\boldsymbol{\frac{7}{8}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．また，$0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$ であるから

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{8}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

- A から辺 BC に下した垂線の長さは $\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ であり

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4},\quad \sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}$$

であるから

$$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=2\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2-1=\frac{7}{8},$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABH}$ は $\angle\mathrm{AHB}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから

$$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}\sin\theta=1\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\cos\theta=1\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{8}$$

$$\mathrm{CH}=\mathrm{AC}-\mathrm{AH}=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$$

である．また，P は辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点であるから

$$\mathrm{BP} = s\mathrm{BH} = \frac{\sqrt{15}}{8}s$$

$$\mathrm{PH} = (1-s)\mathrm{BH} = \frac{\sqrt{15}}{8}(1-s)$$

である．したがって

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2 \\
=&(\mathrm{AH}^2 + \mathrm{PH}^2) + \mathrm{BP}^2 + (\mathrm{PH}^2 + \mathrm{CH}^2) \\
=&\left\{\frac{49}{64} + \frac{15}{64}(1-s)^2\right\} + \frac{15}{64}s^2 + \left\{\frac{15}{64}(1-s)^2 + \frac{1}{64}\right\} \\
=&\frac{30}{64}(1-s)^2 + \frac{15}{64}s^2 + \frac{50}{64} \\
=&\frac{45}{64}s^2 - \frac{15}{16}s + \frac{5}{4} \\
=&\frac{45}{64}\left(s - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{15}{16}
\end{aligned}$$

s は $0 < s < 1$ の範囲を動くから，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ は

$\boldsymbol{s = \frac{2}{3}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\frac{15}{16}}$ ……(答)

をとる．