以下の問いに答えよ．

(1) (a) 加法定理を利用し，等式

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

を証明せよ．

(b) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき，$\sin 2\theta = \sin 3\theta$ を満たす θ を求めよ．

(2) (1) (b) で求めた θ に対して，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) 3 つの三角比の積 $\sin 6^\circ \sin 54^\circ \sin 66^\circ$ の値を求めよ．

(20 浜松医大 1)

【答】

(1) (a) 略　　(b) $\theta = 36^\circ$

(2) $\cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

(3) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{16}$

【解答】

(1) (a) $A = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$B = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ とおくと

$$\begin{cases}\alpha+\beta = 2A \\ \alpha-\beta = 2B\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}\alpha = A+B \\ \beta = A-B\end{cases}$$

である．加法定理を用いると

$$\begin{aligned}\sin\alpha - \sin\beta &= \sin(A+B) - \sin(A-B) \\ &= (\sin A\cos B + \cos A\sin B) - (\sin A\cos B - \cos A\sin B) \\ &= 2\cos A\sin B \\ &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}$$

……(証明終わり)

(b) $\sin 2\theta = \sin 3\theta$ …… ①

(a) の等式を利用すると

$$\sin 3\theta - \sin 2\theta = 0$$

$$2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき，$0^\circ < \dfrac{5\theta}{2} < 225^\circ$，$0^\circ < \dfrac{\theta}{2} < 45^\circ$ より，① を満たす θ は

$$\frac{5\theta}{2} = 90^\circ \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\theta = 36^\circ}$$

……(答)

- (a) を用いずに解くこともできる．

  ① $\iff$ $3\theta = 2\theta + n\times 360^\circ$ または $(180^\circ - 2\theta) + n\times 360^\circ$　(n は整数)

  $\therefore \quad \theta = n\times 360^\circ$ または $\dfrac{2n+1}{5}\times 180^\circ$

  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より　　$\theta = 36^\circ$

(2) $\theta = 36^\circ$ は ① を満たしており，2 倍角，3 倍角の公式を用いると

$$2\sin\theta\cos\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$\sin\theta = \sin 36^\circ \fallingdotseq 0$ より

$$2\cos\theta = 3 - 4(1-\cos^2\theta)$$

$$\therefore\quad 4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$\cos\theta = \sin 36^\circ > 0$ より

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) $\theta = 36^\circ$ であるから，積を和に直す公式を用いると

$$\begin{aligned}
&\sin 6^\circ \sin 54^\circ \sin 66^\circ \\
=&\sin 54^\circ \times \sin 66^\circ \sin 6^\circ \\
=&\sin(90^\circ - 36^\circ) \times \left(-\frac{1}{2}\right)\{\cos(66^\circ + 6^\circ) - \cos(66^\circ - 6^\circ)\} \\
=&-\frac{1}{2}\cos 36^\circ(\cos 72^\circ - \cos 60^\circ) \\
=&-\frac{1}{2}\cos\theta\left(\cos 2\theta - \frac{1}{2}\right) \\
=&-\frac{1}{2}\cos\theta\left(2\cos^2\theta - \frac{3}{2}\right) \quad (\because\ 2\text{ 倍角の公式}) \\
=&-\frac{1}{4}(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) \qquad \cdots\cdots ③ \\
=&-\frac{1}{4}\cos 3\theta \quad (\because\ 3\text{ 倍角の公式})
\end{aligned}$$

ここで，$\varphi = 3\theta = 108^\circ$ とおくと $5\varphi = 540^\circ (= 360^\circ + 180^\circ)$ であり

$$\sin 2\varphi = \sin(540^\circ - 3\varphi) = \sin 3\varphi$$

である．φ は ① の解であり，$\sin\varphi \fallingdotseq 0$ より ② の解である．φ は鈍角より ② の負の解であるから

$$\cos\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

よって

$$\sin 6^\circ \sin 54^\circ \sin 66^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{16}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- ③ 以降は次のように計算してもよい．② より

$$\begin{aligned}
4\cos^3\theta - 3\cos\theta &= (4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right) - \cos\theta + \frac{1}{2} \\
&= -\cos\theta + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1-\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

であるから

$$\sin 6^\circ \sin 54^\circ \sin 66^\circ = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{16}$$