次の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．

座標平面上において，次の 2 つの円を考える．

$$C_1 : x^2 + y^2 = 5 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$C_2 : (x-a)^2 + (y-a)^2 = 45 \qquad \cdots\cdots ②$$

ただし，a は正の定数とする．このとき，次のことがいえる．

(1) 円 C_1 上の点 P$(-2,\ 1)$ における円 C_1 の接線 ℓ の方程式を求めると，

$$y = \boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}$$

である．

(2) (1) で求めた接線 ℓ と円 C_2 が点 Q で接する場合を考える．

円 C_2 の中心と接線 ℓ との距離は円 C_2 の半径と等しいから，

$$a = \boxed{\text{ウエ}}$$

である．

また，点 Q の座標は

$$\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カキ}}\right)$$

である．

このとき，円 C_1 上を動く点 R を考える．△PQR の面積の最大値は

$$\boxed{\text{クケ}}$$

である．

(3) 円 C_1 と円 C_2 が外接する場合を考える．

a の値は

$$a = \boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$$

である．

また，そのときの接点の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)$$

である．

(20 神戸学院大 法・経・栄養・リハ・薬 1)

【答】

ア	イ	ウエ	オ	カキ	クケ	コ	サシ	スセ	ソ	タチ	ツ
2	5	10	4	13	30	2	10	10	2	10	2

【解答】

$$C_1 : x^2 + y^2 = 5 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$C_2 : (x-a)^2 + (y-a)^2 = 45 \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) 円 C_1 上の点 P$(-2,\ 1)$ における円 C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$-2 \cdot x + 1 \cdot y = 5$$

$$\therefore \quad l : y = \boxed{\mathbf{2}}\,x + \boxed{\mathbf{5}} \qquad \cdots\cdots ③$$

$\cdots\cdots$ (ア，イの答)

(2) 円 C_2 の中心 $(a,\ a)$ を A とすると，直線 ℓ と円 C_2 が接する条件は，A と接線 ℓ との距離が円 C_2 の半径 $3\sqrt{5}$ と等しいことであるから

$$\frac{|2a - a + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{5}$$

$$|a + 5| = 15$$

$$\therefore \quad a = -5 \pm 15$$

$a > 0$ より

$$a = \boxed{\mathbf{10}}$$

$\cdots\cdots$ (ウエの答)

である．

また，直線 ℓ と円 C_2 の接点 Q は，AQ $\perp$ ℓ より

$$y = -\frac{1}{2}(x - 10) + 10$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{2}x + 15 \qquad \cdots\cdots ④$$

上の点でもある．③，④ を連立することにより，Q の座標は

$$\left(\boxed{\mathbf{4}},\ \boxed{\mathbf{13}}\right)$$

$\cdots\cdots$ (オ，カキの答)

である．

点 R が円 C_1 上を動くとき，△PQR の面積が最大となるのは，PQ は一定より，R から ℓ に下した垂線の長さが最大のときであり，PR $\perp$ PQ，すなわち，線分 PR が円 C_1 の直径となるときである．

よって，面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\mathrm{PQ} \cdot \mathrm{PR} = \frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2 + (13-1)^2} \cdot 2\sqrt{5} = \boxed{\mathbf{30}}$$

$\cdots\cdots$ (クケの答)

である．

(3) 円 C_1 と円 C_2 が外接する条件は，2 つの円の中心間の距離が 2 つの円の半径の和に等しいことであるから

$$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{5} + 3\sqrt{5}$$

$a > 0$ より

$$a = \boxed{\mathbf{2}}\sqrt{\boxed{\mathbf{10}}}$$

$\cdots\cdots$ (コ，サシの答)

である．

また，そのときの接点は線分 OA を $1 : 3$ に内分するから，求める接点の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{\boxed{\mathbf{10}}}}{\boxed{\mathbf{2}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\mathbf{10}}}}{\boxed{\mathbf{2}}}\right)$$

$\cdots\cdots$ (スセ〜ツの答)

である．