2 点 A，B で交わる 2 つの円 O，O$'$ がある．点 A における円 O の接線を ℓ，点 A における円 O$'$ の接線を ℓ' とする．ℓ' と円 O の交点のうち A と異なるものを C，ℓ と円 O$'$ の交点のうち A と異なるものを D とする．

(1) $\triangle$ABC と $\triangle$DBA が相似であることを証明せよ．

(2) 3 点 B，C，D が同一直線上にあるとき，弦 AC は円 O の中心を通ることを証明せよ．

(3) 3 点 B，C，D が同一直線上にあり，円 O の中心と点 B を通る直線が点 E で ℓ と交わるとき，$\left(\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}\right)^2=\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{DE}}$ が成り立つことを証明せよ．

(20 岡山理大)

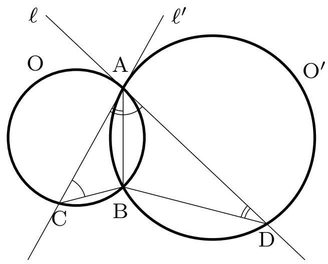
【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

【解答】



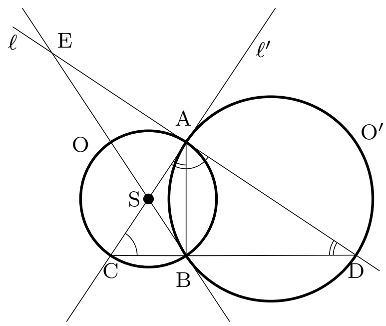
(1) $\triangle$ABC と $\triangle$DBA について，接弦定理を用いると

$$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{DAB},$$
$$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDA}$$

が成り立ち，2 組の角が等しいことから

$$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{DBA}$$

である．　…… (証明終わり)



(2) 3 点 B，C，D が同一直線上にあるとき

$$\angle\mathrm{CBA}+\angle\mathrm{ABD}=180^\circ$$

が成り立つ．(1) より，$\angle\mathrm{CBA}=\angle\mathrm{ABD}$ であるから

$$\angle\mathrm{CBA}=90^\circ$$

であり，線分 AC は円 O の直径である．

よって，弦 AC は円 O の中心を通る．

…… (証明終わり)

(3) (1) より，$\triangle$ABC $\backsim$ $\triangle$DBA であるから，この 2 つの三角形の面積比を考えると

$$\left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}\right)^2=\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{DBA}}=\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}$$

である．また，円 O の中心を S として，$\triangle$ACD と直線 EB でメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SC}}=1$$
$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{1}{1}=1$$
$$\therefore\ \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}=\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{DE}}$$

である．よって

$$\left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}\right)^2=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{DE}}$$

が成り立つ．　…… (証明終わり)