2 次曲線 $y^2=2x^2+2x-1$ の離心率は $\boxed{\text{コ}}$ である．

(20 産業医大 医 1(10))

【答】

コ
$\sqrt{3}$

【解答】

$$y^2=2x^2+2x-1 \qquad \cdots\cdots ①$$

平方完成して式を整理すると

$$y^2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$

$$2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}-\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$$

となり，① は双曲線である．焦点は x 軸上にあり，焦点の x 座標は

$$-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}=1,\ -2$$

であり，頂点間の距離は

$$2\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

である．

よって．離心率 e は

$$e=\frac{(\text{焦点間の距離})}{(\text{頂点間の距離})}=\frac{1-(-2)}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 定点 F と F を通らない直線 l があるとき，F までの距離 PF と l までの距離 PH の比 $\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ が一定な点 P の軌跡は 2 次曲線になる． $\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ を離心率といい，e で表す．

  (i) $e=1$ のとき
  これは放物線の定義である．

  (ii) $e\fallingdotseq 1$ のとき

  (ア) 焦点の座標 $(\pm c,\ 0)(c>0)$，長軸の長さ $2a$ $(a>0)$ の楕円を考える．
  $\mathrm{P}(x,\ y)$ がこの楕円上にあるとき，楕円の定義より

  $$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

  であり，$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ を 2 乗して整理すると

  $$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

  $$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

  $$\therefore \quad \sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}-x\right)$$

  を得る． $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ は焦点 $(c,\ 0)$ と点 P の距離 PF であり，直線 $x=\dfrac{a^2}{c}$ を l とおくと，(左辺) と $\dfrac{c}{a}$ が正であることより $\dfrac{a^2}{c}-x>0$ が確認され， $\dfrac{a^2}{c}-x$ は点 P と直線 l との距離 PH である．

  $$\mathrm{PF}=\frac{c}{a}\mathrm{PH} \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=\frac{c}{a}$$

すなわち

$$(\text{離心率 } e) = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{(\text{焦点間の距離})}{(\text{長軸の長さ})}$$

である．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$ では，$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ より，$0 < e < 1$ であり

焦点 $(ae,\ 0)$ に対する準線は　$x = \dfrac{a}{e}$

焦点 $(-ae,\ 0)$ に対する準線は　$x = -\dfrac{a}{e}$

である．

(イ) 焦点の座標 $(\pm c,\ 0)(c > 0)$，頂点間の距離 $2a\ (a > 0)$ の双曲線を考える．

$\mathrm{P}(x,\ y)$ がこの双曲線上にあるとき，双曲線の定義より

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

であり，$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ を 2 乗して整理すると

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\mp 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}\left|\frac{a^2}{c} - x\right|$$

を得る．$\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ は焦点 $(c,\ 0)$ と点 P の距離 PF であり，直線 $x = \dfrac{a^2}{c}$ を l とおくと，$\left|\dfrac{a^2}{c} - x\right|$ は点 P と直線 l との距離 PH である．

$$\mathrm{PF} = \frac{c}{a}\mathrm{PH} \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}} = \frac{c}{a}$$

すなわち

$$(\text{離心率 } e) = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{(\text{焦点間の距離})}{(\text{頂点間の距離})}$$

である．双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0,\ b > 0)$ では，$e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$ であり

焦点 $(ae,\ 0)$ に対する準線は　$x = \dfrac{a}{e}$

焦点 $(-ae,\ 0)$ に対する準線は　$x = -\dfrac{a}{e}$

である．