媒介変数 t を用いて $x=\cos 3t,\ y=\sin 4t$ と表される座標平面上の曲線を C とする．C と直線 $y=\dfrac{1}{3}$ が交わる座標平面上の点の個数は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(20 産業医大 医 1(5))

【答】

オ
8

【解答】

$$C:\begin{cases} x=\cos 3t \\ y=\sin 4t \end{cases}$$

C と直線 $y=\dfrac{1}{3}$ が交わるのは，t が

$$\sin 4t=\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たすときである．$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ をみたす θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を α とおくと，① の解は

$$4t=\alpha+2k\pi,\ \pi-\alpha+2k\pi\ (k \text{ は整数})$$

$$\therefore\quad t=\frac{\alpha}{4}+\frac{k\pi}{2},\ \frac{\pi-\alpha}{4}+\frac{k\pi}{2}$$

である．

(i) $t=\dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ のとき

$$\cos 3t=\cos\left(\frac{3\alpha}{4}+\frac{3k\pi}{2}\right)=\begin{cases} \cos\dfrac{3\alpha}{4} & (k\equiv 0 \pmod 4 \text{ のとき}) \\ \sin\dfrac{3\alpha}{4} & (k\equiv 1 \pmod 4 \text{ のとき}) \\ -\cos\dfrac{3\alpha}{4} & (k\equiv 2 \pmod 4 \text{ のとき}) \\ -\sin\dfrac{3\alpha}{4} & (k\equiv 3 \pmod 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(ii) $t=\dfrac{\pi-\alpha}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ のとき

$$\cos 3t=\cos\left(\frac{3(\pi-\alpha)}{4}+\frac{3k\pi}{2}\right)=\begin{cases} \cos\dfrac{3(\pi-\alpha)}{4} & (k\equiv 0 \pmod 4 \text{ のとき}) \\ \sin\dfrac{3(\pi-\alpha)}{4} & (k\equiv 1 \pmod 4 \text{ のとき}) \\ -\cos\dfrac{3(\pi-\alpha)}{4} & (k\equiv 2 \pmod 4 \text{ のとき}) \\ -\sin\dfrac{3(\pi-\alpha)}{4} & (k\equiv 3 \pmod 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

α は $0<\sin\alpha<\dfrac{1}{2}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすから

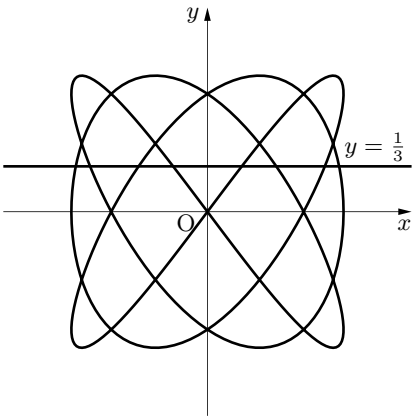
$$0<\alpha<\frac{\pi}{6} \qquad \therefore\quad 0<\frac{3\alpha}{4}<\frac{\pi}{8}$$

であり，(i) の 4 個の値はすべて異なる．また

$$\frac{5\pi}{6}<\pi-\alpha<\pi \qquad \therefore\quad \frac{5\pi}{8}<\frac{3(\pi-\alpha)}{4}<\frac{3\pi}{4}$$

であり，(ii) の 4 個の値はすべて異なる．さらに，(i)，(ii) の 8 個の値はすべて異なるから，求める点の個数は

8 ……(答)

である．

- 曲線 C と直線 $y = \dfrac{1}{3}$ を図示すると右図となる．