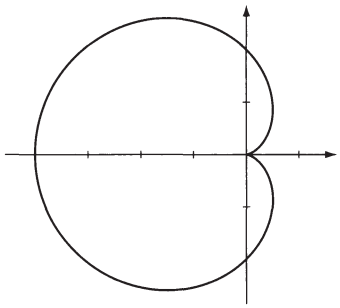
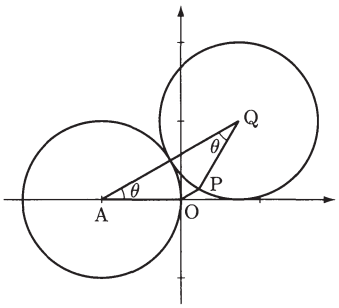
点 A$(-1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 A があり，半径 1 の円 Q は円 A に外接しながら滑ることなく反時計回りに一周する．円 Q 上の点 P ははじめ原点にある．点 P が描く曲線 (下図左) について考えよう．下図右は角 θ 回転した状態を示す．円 Q の中心 Q の座標は $\left(\boxed{\text{ア}}\cos\theta-\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ア}}\sin\theta\right)$ なので，点 P の座標は $\left(\boxed{\text{ア}}\cos\theta-\cos\boxed{\text{ウ}}\theta-\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ア}}\sin\theta-\sin\boxed{\text{ウ}}\theta\right)$ となる．したがって，点 P が描く曲線は極座標で $r(\theta)=\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}\cos\theta$ と表される．

一般に極座標で $r=r(\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と表される曲線に囲まれた部分の面積は $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2\,d\theta$，曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ により求められるので，点 P が描く曲線に囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{カ}}\pi$，曲線の長さは $\boxed{\text{キク}}$ となる．



点Pが描く曲線



はじめからθ回転したとき

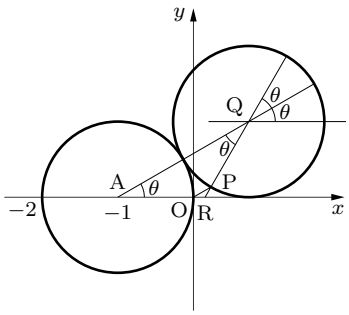
(20 順天堂大 医 1(3))

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キク
2	1	2	2	2	6	16

【解答】

円 Q を滑ることなく反時計回りに角 θ 回転したとき



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=(-1,\ 0)+2(\cos\theta,\ \sin\theta)\\&=(2\cos\theta-1,\ 2\sin\theta)\end{aligned}$$

であるから，中心 Q の座標は

$$\mathrm{Q}(\mathbf{2}\cos\theta-\mathbf{1},\ 2\sin\theta)\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}\\&=(2\cos\theta-1,\ 2\sin\theta)+(\cos(2\theta+\pi),\ \sin(2\theta+\pi))\\&=(2\cos\theta-\cos 2\theta-1,\ 2\sin\theta-\sin 2\theta)\end{aligned}$$

であるから，点 P の座標は

$$(2\cos\theta-\cos\mathbf{2}\theta-1,\ 2\sin\theta-\sin 2\theta)\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

直線PQとx軸の交点をRとおくと，△RAQは底角θの二等辺三角形であり，OA = PQ(= 1)であるから，RO = RP である．したがって，△ROP ∽ △RAQ であり，∠ROP = θ である．

P の極座標 $(r,\ \theta)$ として，O を極，x 軸の正の部分を始線とることができるから

$$
\begin{aligned}
r^2 &= (2\cos\theta - \cos 2\theta - 1)^2 + (2\sin\theta - \sin 2\theta)^2 \\
&= (4\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + 1 - 4\cos\theta\cos 2\theta + 2\cos 2\theta - 4\cos\theta) \\
&\quad + (4\sin^2\theta - 4\sin\theta\sin 2\theta + \sin^2 2\theta) \\
&= 6 - 4(\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta) + 2\cos 2\theta - 4\cos\theta \\
&= 6 - 4\cos(2\theta - \theta) + 2\cos 2\theta - 4\cos\theta \\
&= 6 - 8\cos\theta + 2\cos 2\theta \qquad \cdots\cdots ① \\
&= 6 - 8\cos\theta + 2(2\cos^2\theta - 1) \\
&= 4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta \qquad \cdots\cdots ② \\
&= 4(1 - \cos\theta)^2
\end{aligned}
$$

$r \geqq 0$ より，P の描く曲線は極座標で

$$r(\theta) = \mathbf{2} - \mathbf{2}\cos\theta \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表される．C で囲まれた部分の面積を S とおくと

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (3 - 4\cos\theta + \cos 2\theta)\, d\theta \quad (\because\ ①) \\
&= \left[3\theta - 4\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= \mathbf{6}\pi \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．また，曲線の長さを L とおくと

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta) + (2\sin\theta)^2}\, d\theta \quad (\because\ ②,\ ③) \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{8(1 - \cos\theta)}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{16\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta \\
&= 4\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= 4(2 + 2) \\
&= \mathbf{16} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．